Concours Général 2003: Epreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée: 6 heures

Partie 1

Ce sujet traite de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y), x, y \in \mathbb{R}$ qui caractérise les fonctions exponentielles. On en profite pour démontrer plusieurs résultats

1) $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^(k)(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\epsilon_n \end{array}$

Soit $0 \leq m \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{k!}(x-a)^{k-m} f^(k)(a) - \frac{(n+1)\cdots(n-k)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1-k}\epsilon_n$$

$$\phi^{(m)}(a) = \underbrace{f^{(m)}(a) - \frac{m!}{m!} f^{(m)}(a)}_{=0} - \frac{(n+1)\cdots(n-m)}{(n+1)!} \underbrace{(a-a)^{n+1-m}}_{=0} \epsilon_n = 0$$

$$\phi^{(m)}(a) = 0.$$

b)

$$\phi^{(0)}(b) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^(k)(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\epsilon_n.$$

Supposons que C_m est construit avec $m \leq n$: $\phi^{(m)}(C_m) = \phi^{(m)}(a) = 0$.
D'après le théorème de des acroissements finis il existe $C_{m+1} \in]a,\ C_m[$ tel que $\phi^{(m+1)}(C_{m+1}) = 0$.
Or $\phi^{(n+1)}(C_{n+1}) = f^{(n+1)}(C_{n+1}) - \epsilon_n = 0$. Donc $c = C_{n+1}$ convient :

$$f^{(n+1)}(C) = \epsilon_n$$

2)

$$\begin{aligned} c \in]a,\ b[&\iff 0 < c-a < b-a \\ &\iff 0 < \frac{c-a}{b-a} < 1 \\ &\iff c = a + \theta(b-a) \ \text{ et } \ 0 < \theta < 1 \quad (\text{on a posé } \ \theta = \frac{c-a}{b-a}). \end{aligned}$$

3) :Applications On pose $\alpha_r(x) = (1+x)^r,\ x \in]-1,\ +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$.
On a le développement :

$$\alpha_r(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k + \frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1+\theta x)^{r-n-1}$$

. Soit a et b deux réels et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

– Si $a = 0$ ou $b = 0$, la formule est claire.
– Si a et b sont non nuls :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n(1+\frac{b}{a})^n \\ &= a^n(1+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}}_{=C_n^k}(\frac{b}{a})^k) \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}\end{aligned}$$

Partie 2

1)

a)
– Si $y = 0$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x) \times f(0)$.
– Si $x = y = 0$, $\quad f(0) = f(0)^2$.

b) Soit f une fonction constante vérifiant (P_0) : $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$,
donc $f = 0$ ou $f = 1$.
Réciproquement ces deux fonctions vérifient bien (P_0) et sont dans $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ et $\mathcal{D}$.

c) Soit $f \in \mathcal{F}$. $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

2)

a) Soit $f \in \mathcal{F}$:
$f(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x,\ f(x) = f(x)f(0) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

b) Par récurrence sur n : soit H_n la propriété $f(\frac{x_0}{2^n}) = 0$.
H_0 est vraie ;
Supposons que H_n est vraie.
$f(\frac{x_0}{2^n}) = f(\frac{x_0}{2^{n+1}} + \frac{x_0}{2^{n+1}}) = f(\frac{x_0}{2^{n+1}})^2 = 0$ donc $f(\frac{x_0}{2^{n+1}}) = 0$ d'où H_{n+1}

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(\frac{x_0}{2^n}) = 0$$

Comme $\frac{x_0}{2^n} \to_{n\to+\infty} 0$ et que f est continue en 0,
$\underbrace{f(\frac{x_0}{2^n})}_{=0} \to_{n\to+\infty} f(0)$ donc $f(0) = 0$ par unicité de la limite.

3) Soit $f \in \mathcal{F}^*$. D'après $2-a)$, $f(0)=1$.
De plus pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{2})^2 > 0$ car $f(\frac{x}{2}) \in \mathbb{R}^*$ d'après $2-b)$.

4) Soit $k \in \mathbb{R}$, f et $g \in \mathcal{F}$.
Si $f=0$: n'importe quel k convient. Supposons que $f \neq 0$: Si $kf \in \mathcal{F}$ alors $kf(0) = (kf(0))^2$ donc $k = k^2$ d'où $k=0$ ou $k=1$ est une condition nécessaire.
La condition $k=0$ ou $k=1$ est clairement suffisante. Supposons maintenant que $f+g \in \mathcal{F}$

$$\underbrace{(f+g)(0)}_{\in\{0,1\}} = \underbrace{f(0)+g(0)}_{\in\{0,1,\,2\}}$$

Donc $f(0)=0$ ou $g(0)=0$ d'où $f=0$ ou $g=0$.
On en déduit que si $f \neq 0$ ou $g \neq 0$, alors $f+g \notin \mathcal{F}$;
en particulier $f+g \notin \mathcal{F}^*$ $(\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F})$.

c) Soit $f,\ g \in \mathcal{D}$.
$\frac{f}{g}$ et fg sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et ne s'annulent pas.
De plus, elles vérifient clairement (P_0) donc $\frac{f}{g}$ et $fg \in \mathcal{D}$.

5) Soit $f \in \mathcal{F}^*$ et $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit H_n la proposition : $f(nx) = f(x)^n$.
H_0 est vraie.
Supposons que H_n est vraie ; $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$ donc H_{n+1} est vraie. D'où $\forall n \geq 0$, H_n est vraie.
$\forall n \geq 0$, $f(nx) = f(x)^n$
Soit $n \in \mathbb{N}$. $f(-nx+nx) = f(0) = 1 = f(nx)f(-nx)$ donc $f(-nx) = f(nx)^{-1} = f(x)^{-n}$.
Maintenant pour $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a :
$f(px) = f(q \times \frac{p}{q}x) = f(\frac{p}{q}x)^q$ donc

$$f(\frac{p}{q}x) = f(px)^{\frac{1}{q}} = f(x)^{\frac{p}{q}} f(r \times x) = f(x)^r$$

b) Soit $x,\ y \in \mathbb{R}$: $f(x-y) = f(x)f(-y) = f(x)f(y)^{-1}$

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

6)

Lemme 1 (prolongement des identités)**.** *On dit qu'un sous ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$, si tout $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A. La propriété (P_1) dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f et g coincident sur $\mathbb{Q}$. Alors f et g coincident sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Dire que f et g coincident sur $\mathbb{Q}$, c'est dire que $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = g(r)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit (r_n) une suite de rationnels convergeant vers x. On a :
$\forall n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = g(r_n)$.
Or f et g sont continues en x donc
$\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} g(r_n) = g(x)$.
donc en passant à la limite dans les deux membres de l'égalité $f(r_n) = g(r_n)$: on obtient $f(x) = g(x)$. D'où $f = g$. $\square$

Soit $f,\ g \in \mathcal{F}^*$. Si $f = g$ alors $f(1) = g(1)$.
Réciproquement, si $f(1) = g(1)$: Pour $r \in \mathbb{Q},\ f(r \times 1) = f(1)^r = g(1)^r = g(r)$ donc f et g coincident sur $\mathbb{Q}$.
Comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, le lemme de prolongement des identités nous dit que $f = g$. En conclusion

$$f = g \Leftrightarrow f(1) = g(1)$$

7) Soit $x,\ y \in \mathbb{R}$. Montrons que $f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y)$. Soit (x_n) et (y_n) deux suites de rationnels convergeant respectivement vers x et y. On a $(x_n + y_n)$ converge vers $x + y$ donc par continuité de f_a en $x + y$.

$$\begin{aligned}
f_a(x+y) &= \lim_{n\to+\infty} f_a(x_n + y_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} a^{x_n+y_n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} a^{y_n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} f_a(x_n) f_a(y_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} f_a(x_n) \lim_{n\to+\infty} f_a(y_n) \\
&= f_a(x) f_a(y)
\end{aligned}$$

f_a vérifie (P_0), f_a est dérivable et f_a est non nulle $(f_a(0) = 1)$ donc $f_a \in \mathcal{D}$.

b) On pose pour $a > 0 : \alpha(a) = f_a$
- α est injective.
  Soit a et $b > 0$ tel que $\alpha(a) = \alpha(b)$.
  On a alors $f_a = f_b$ donc $a = f_a(1) = f_b(1) = b$, d'où l'injectivité.
- α est surjective. Soit $f \in \mathcal{D}$. On pose $a = f(1)$.
  On a $f_a \in \mathcal{D}$ et $f(1) = f_a(1) = a$, donc d'après $2-6)$, $f = f_a$ d'où la surjectivité.

Donc α est bijective.

c) Soit $a,\ b > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$.

$c-1)$ $\alpha(a)\alpha(b) \in \mathcal{D}$ et $\alpha(ab)(1) = \alpha(a)\alpha(b)(1) = ab$ donc $2-6) \Rightarrow \alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$.

$c-3)$ $\frac{\alpha(a)}{\alpha(b)} \in \mathcal{D}$ et $\alpha(\frac{a}{b})(1) = \frac{\alpha(a)}{\alpha(b)}(1) = \frac{a}{b}$ donc $2-6) \Rightarrow \alpha(\frac{a}{b}) = \frac{\alpha(a)}{\alpha(b)}$.
$c-2)$ découle de $c-3)$.

$c-4)$ $\alpha(a)^r$ vérifie clairement (P_0) et $\alpha(a)^r$ est dérivable de dérivée $r\alpha(a)^{r-1}\alpha(a)'$ ($\alpha(a)$ ne s'annule pas).
Donc $\alpha(a)^r \in \mathcal{D}$. De plus $\alpha(a)^r(1) = (\alpha(a^r)(1))$, donc $2-6) \Rightarrow \alpha(a)^r = \alpha(a^r)$.

Partie 3

1) Soit $f_a \in \mathcal{F}^*$, dérivable en 0 et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{f_a(x_0+h)-f_a(x_0)}{h} &= \frac{f_a(x_0)f_a(h)-f_a(x_0)}{h} \\ &= f_a(x_0)\frac{f_a(h)-1}{h} \\ &\to_{h\to 0,\, h\neq 0} f_a(x_0)f_a'(0)\end{aligned}$$

Donc f_a est dérivable en x_0 et $f_a'(x_0) = f_a(x_0)f_a'(0)$.

2) On a : $f_a' = f_a'(0)f_a$, donc f_a' est dérivable donc continue d'où f_a est C^1.
Par récurrence sur n :
Supposons que f_a est $C^n (n \geq 1)$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$.
$f_a^{(n)}(x) = f_a'(0)f_a^{(n-1)}(x)$ et $f_a^{(n)}(x) = (f_a'(0))^n f_a(x)$.
f_a est C^1 donc $f_a^{(n)} = (f_a'(0))^n f_a$ est C^1 donc f_a est C^{n+1}.
De plus

$$f_a^{(n+1)} = (f_a^{(n)})' = (f_a'(0))^n f_a' = (f_a'(0))^n f_a'(0) f_a = f_a'(0))^{n+1} f_a$$

En dérivant la relation $f_a^{(n)} = f_a'(0)f_a^{(n-1)}$ on obtient :
$f_a^{(n+1)} = f_a'(0)f_a^{(n)}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, f_a est C^n et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a^{(n)}(x) = f_a'(0)f_a^{(n-1)}(x) \text{ et } f_a^{(n)}(x) = (f_a'(0))^n f_a(x)$$

3) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\mu(f_a) = f_a'(0)$.
Propriétés algébriques de μ

a)

$a-1)$ Si $\mu(f_a) = f_a'(0) = 0$:
$f_a' = f_a'(0)f_a = 0$ donc f_a est constante d'où $f_a = f_a(0) = 1 = f_a(1) = a$.
Réciproquement si $f_a = 1$, $\mu(f_a) = f_a'(0) = 0$.
Donc $\mu(f_a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

$a-2)$

Lemme 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.*
Soit $\overline{f}$ la restriction de f à $\mathbb{Q}$.
$\overline{f} : r \in \mathbb{Q} \to f(r)$.
On a l'équivalence :
$\overline{f}$ *est strictement croissante* $\Leftrightarrow f$ *est strictement croissante.*

Démonstration. – $\Leftarrow$: supposons que f est strictement croissante,
si $r,\ s$ sont des rationnels tels que $r < s$, alors $f(r) < f(s)$, donc $\overline{f}(r) < \overline{f}(s)$ donc $\overline{f}$ est strictement croissante.

– $\Rightarrow$:
Supposons que $\overline{f}$ est strictement croissante.
Soit $x,\ y$ deux réels tels que $x < y$ et soit $r,\ s$ des rationnels tels que $x < r < s < y$.
Soit (x_n) et (y_n) des suites de rationnels convergeant respectivement vers x et y.
A partir d'un certain rang n_0 on a pour tout $n \geq n_0,\ \ x_n \leq r$.
De même à partir d'un certain rang n_1, on a pour tout $n \geq n_1,\ \ y_n \geq s$
Soit $N = max(n_0,\ n_1)$.

$$\forall n \geq N,\ x_n \leq r < s \leq y_n.$$

Donc $\forall n \geq N,\ \overline{f}(x_n) \leq \overline{f}(r) < \overline{f}(s) \leq \overline{f}(y_n)$.

$$\forall n \geq N,\ f(x_n) \leq f(r) < f(s) \leq f(y_n).$$

Et en passant à la limite dans les inégalités

$$\forall n \geq N,\ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq f(r) < f(s) \leq \lim_{n \to +\infty} f(y_n)$$

et par continuité de f en x et y on obtient

$$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y)$$

donc $f(x) < f(y)$ et f est strictement croissante.

□

Or $\overline{f_a}$ est strictement croissante ssi $a > 1$.
Donc $a > 1 \Leftrightarrow f_a$ strictement croissante $\Leftrightarrow f_a' > 0$.
Or $f_a' = f_a'(0) \underbrace{f_a}_{>0}$, donc $a > 1 \Leftrightarrow f_a'(0) > 0$.

b)

$b-1)$ Soit $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}\mu(f_a f_b) &= (f_a f_b)'(0)\\ &= f_a'(0)\underbrace{f_b(0)}_{=1} + \underbrace{f_a(0)}_{=1} f_b'(0)\\ &= \mu(f_a) + \mu(f_b)\end{aligned}$$

$b-2)$ $\mu(f_a \times \frac{1}{f_a}) = \mu(1) = 0 = \mu(f_a) + \mu(\frac{1}{f_a})$
donc
$$\mu(\frac{1}{f_a}) = -\mu(f_a)$$

$b-3)$ $\mu(\frac{f_a}{f_b}) = \mu(f_a) + \mu(\frac{1}{f_b}) = \mu(f_a) - \mu(f_b)$.
$b-4)$ $f_{a^r} = f_a^r$
donc $\mu(f_{a^r}) = \mu(f_a^r)$. Par récurrence immédiate $b-1)$ donne $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu(f_a^n) = n\mu(f_a)$.
$b-2)$donne $\forall n \in \mathbb{Z},\ \mu(f_a^n) = n\mu(f_a)$.
Si $r = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*$,
$$q\mu(f_a^{\frac{p}{q}}) = \mu(f_a^{\frac{p}{q}\times q}) = \mu(f_a^p) = p\mu(f_a)$$
donc $\mu(f_a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\mu(f_a)$
$$\mu(f_{a^r}) = r\mu(f_a)$$

c)

$c-1)$
$$\begin{array}{rcl} \mu(f_a) = \mu(f_b) & \Leftrightarrow & \mu(\frac{f_a}{f_b}) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \mu(f_{\frac{a}{b}}) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \frac{a}{b} = 1 \\ & \Leftrightarrow & a = b \end{array}$$

$c-2)$. De même
$$\begin{array}{rcl} \mu(f_a) > \mu(f_b) & \Leftrightarrow & \mu(\frac{f_a}{f_b}) > 0 \\ & \Leftrightarrow & \mu(f_{\frac{a}{b}}) > 0 \\ & \Leftrightarrow & \frac{a}{b} > 1 \\ & \Leftrightarrow & a > b \end{array}$$

4)

a) En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a''(x) = f_a'(0)^2 f_a(x)$ et $f_a'(x) = f_a'(0) f_a(x)$ et $f_a(x) > 0$.
on obtient : dans tous les cas, $f_a'' > 0$ et donc f_a' est croissante sur $\mathbb{R}$.
Quant à f_a :
- Si $a \in]0,1[$:
  $3-a) \Rightarrow f_a'(0) < 0$.
  Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) < 0$ d'où f_a décroit sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1,\ f_a = 1$
- Si $a > 1,\ f_a$ est croissante sur $\mathbb{R}$

b) On suppose $a > 1$.
Pour $x \geq 0,\ f_a'(x) \geq f_a'(0)$ (f_a' est croissante sur $\mathbb{R}$) f_a est C^1.
donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis :
$\forall x > 0,\ f_a(x) - f_a(0) \geq (x-0) f_a'(0)$.

$$\forall x > 0,\ f_a(x) \geq 1 + x\mu(f_a) \qquad (*)$$

c)

$c-1)$ Si $0 < a < 1$ et $x < 0$:

$$f_a(x) = f_{\frac{1}{a}}(-x) \geq 1 - x\mu(f_{\frac{1}{a}}) = 1 + x\mu(f_a)$$

$c-2)$ Si $a > 0,\ f_a(0) = 1 \geq 1 + 0\mu(f_a)$.

d)

- Si $a > 1,\ \mu(f_a) > 0$ et $(*) \Rightarrow f_a(x) \rightarrow_{x\to+\infty} +\infty$.
  De plus pour $x \in \mathbb{R}_+$: $f_a(-x) = \frac{1}{f_a(x)}$ donc $f_a(x) \rightarrow_{x\to-\infty} 0$.
- Si $a < 1$: pour $x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = f_{\frac{1}{a}}(-x)$.
  Donc $f_a(x) \rightarrow_{x\to+\infty} 0$ et $f_a(x) \rightarrow_{x\to-\infty} +\infty$

0n a alors les tableaux de variations :

- si $a > 1$

	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f_a'	$0 \nearrow +\infty$
f_a	$0 \nearrow +\infty$

- si $a < 1$

	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f_a'	$-\infty \nearrow 0$
f_a	$+\infty \searrow 0$

e) On suppose $a > 1$. Ainsi, $\mu(f_a) > 0$.

$e-1)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La formule de Mac-Laurin à l'ordre n donne pour tout $x \geq 0$, l'existence d'un $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f_a(x) &= f_a(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f_a^k(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f_a^{(n+1)}(\theta x) \\ f_a(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} (\mu(f_a))^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (\mu(f_a))^{n+1} f_a(\theta x) \end{aligned}$$

$$f_a(x) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} (\mu(f_a))^k$$

$e-2)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall x > 0,\ f_a(x) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!}(\mu(f_a))^k \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\mu(f_a))^{n+1}$.
Donc
$\forall x > 0,\ \frac{f_a(x)}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}(\mu(f_a))^{n+1} \to_{x \to +\infty} +\infty$
Pour $x > 0$, on a

$$x^n f_a(-x) = \frac{x^n}{f_a(x)} \to_{x \to +\infty} 0$$

Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$.
Pour $x \geq 1,\ \frac{f_a(x)}{x^r} \geq \frac{f_a(x)}{x^{E(r)+1}} \to_{x \to +\infty} +\infty$
et $x^r f_a(-x) \leq x^{E(r)+1} f_a(-x) \to_{x \to +\infty} 0$.
Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_a(x)}{x^r} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^r f_a(-x) = 0$$

5) Soit $x > 0$.

a) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(0) = 1$,
donc $\lim_{n \to +\infty} S_n(0) = 1$.

b) 0n pose $p = 2(E(x)+1)$.

$$\begin{aligned} s_p(x) = \frac{x^p}{p!} = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\frac{x}{p} &= \frac{x}{p} s_{p-1}(x) \\ &\leq \frac{x}{2x} s_{p-1}(x) \quad (vii) \\ &= \frac{1}{2} s_{p-1}(x) \end{aligned}$$

Par récurrence sur k, supposons que $s_k(x) \leq s_{p-1}(x)\frac{1}{2^{k-p+1}}$ (avec $k \geq p$).

$$\begin{aligned} s_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} &= \frac{x^k}{k!}\frac{x}{k} \\ &\leq \frac{x}{p} s_k(x) \\ &\leq \frac{1}{2} \times s_{p-1}(x)\frac{1}{2^{k-p+1}} \\ &\leq s_{p-1}(x)\frac{1}{2^{k-p+2}} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \geq p,\ s_k(x) \leq s_{p-1}(x)\frac{1}{2^{k-p+1}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$S_{n+1}(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq S_n(x)$ donc $(S_n(x))_n$ est croissante.
De plus, pour $n \geq p$, on a :

$$\begin{array}{rcl} S_n(x) & = & S_{p-1}(x) + \sum_{k=p}^{n} s_k(x) \\ & \leq & S_{p-1}(x) + \sum_{k=p}^{n} s_{p-1}(x)\frac{1}{2^{k-p+1}} \\ & \leq & S_{p-1}(x) + s_{p-1}(x) \underbrace{\sum_{k=1}^{n-p+1} \frac{1}{2^k}}_{=\frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-p+1}}{1-\frac{1}{2}}} \\ & \leq & S_{p-1}(x) + s_{p-1}(x) \end{array}$$

Donc la suite $(S_n(x))$ est croissante et majorée par $S_{p-1}(x) + s_{p-1}(x)$ donc elle converge.
$(S_n(x))$ converge $\forall x \geq 0$.
$S_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{120}$.
$S_5(1) = 2,\ 716$ à 10^{-3} près.

Réponse à la question supplémentaire En utilisant (vii), on obtient pour $n \geq p$, $S_n(1) \leq S_{p-1}(1) + s_{p-1}(1)$, et en faisant $n \to +\infty$, $\gamma \leq S_{p-1}(1) + s_{p-1}(1)$. En fait l'inégalité est stricte car dans la preuve de (vii), en utilisant le fait que $x < E(x) + 1$ à la place de l'inégalité large $x \leq E(x) + 1$, on obtient une inégalité stricte dans (vii). En prenant finalement $p - 1 = b$, on obtient : $\gamma < S_b(1) + s_b(1) = S_b(1) + \frac{1}{b!}$. D'autre part $\gamma \geq S_{b+1}(1) > S_b(1)$, donc $S_b(1) < \gamma = \frac{a}{b} < S_b(1) + \frac{1}{b!}$.

En multipliant chaque terme de la double inégalité par $b!$, on tire : $b!S_b(1) < (b-1)!a < b!S_b(1) + 1$. Mais $b!S_b(1) = \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{k!}$ et chaque terme de la somme étant entier, $b!S_b(1)$ est entier.

Mais $(b-1)!a$ est donc un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, c'est absurde. On en déduit que γ n'est pas rationnel.

6) On a : $f'_a = \mu(f_a)f_a$, donc $f'_a \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \mu(f_a) = 1$ (d'après $2-4$) .

7) Supposons que $\mu(f_a) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_n \in]0,1[$ tel que
$a = f_a(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}f_a(\theta_n)$.
Donc $\left|a - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| = \frac{1}{(n+1)!}f_a(\theta_n)$.
Or une fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment donc il existe $M > 0$ tel que $sup_{x\in[0,1]}f_a(x) = M$.
On a alors : $\left|a - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}M \to_{n\to+\infty} 0$
donc $a = \gamma$.

Fixons $r \in \mathbb{Q}$.
$3-3-b-4) \Rightarrow \mu(f_\gamma^r) = r\mu(f_\gamma) = r$.

b) Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$: il existe θ et $\theta' \in]0,1[$ tel que

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(\mu(f_a))^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\mu(f_a))^{n+1} f_a(\theta x)$$

$$f_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f_\gamma(\theta' x)$$

c) On pose $\mu(f_a) = m$.

$$\begin{aligned} a - f_\gamma(m) &= f_a(1) - f_\gamma(m) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left[\frac{(\mu(f_a))^k}{k!} - \frac{m^k}{k!}\right]}_{=0} \tfrac{m^{n+1}}{(n+1)!} f_a(\theta) - \tfrac{m^{n+1}}{(n+1)!} f_\gamma(\theta' m) \\ &= \tfrac{m^{n+1}}{(n+1)!}\left[f_a(\theta) - f_\gamma(\theta' m)\right] \end{aligned}$$

Or $\frac{m^{n+1}}{(n+1)!} = S_{n+1}(m) - S_n(m) \rightarrow_{n \to +\infty} 0$ car les suites $(S_{n+1}(m))$ et $(S_n(m))$ convergent vers la même limite.
Donc

$$\begin{aligned} |a - f_\gamma(m)| &= \tfrac{|m|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f_a(\theta) - f_\gamma(\theta' m)\right| \\ &\leq \tfrac{|m|^{n+1}}{(n+1)!}\left[sup_{x\in[0,1]} f_a(x) + sup_{x\in[-|m|,\,|m|]} f_\gamma(x)\right] \end{aligned}$$

Donc en faisant $n \to +\infty$ on obtient $a - f_\gamma(m) = 0$.

$$a = f_\gamma(\mu(f_a))$$

d) Soit $x > -1,\ n \in \mathbb{N}^*,\ r \in \mathbb{Q}^*,\ |r| < 1$.
Pour $y > -1$; $\alpha_r(y) = (1+y)^r$.
On pose $a = x + 1 > 0$. La formule de Mac-Laurin donne l'existence de $\theta_r \in]0,1[$ tel que $\alpha_r(x) = a^r = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k + \frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1+\theta_r x)^{r-n-1}$.
On a d'une part :

$$\frac{\alpha_r(x) - 1}{r} = \frac{a^r - 1}{r} = \frac{f_a(r) - f_a(0)}{r} \longrightarrow_{r\to 0,\ r\in\mathbb{Q}^*} \quad f_a'(0)$$

D'autre part

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{a^r-1}{r} & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}(a-1)^k & + & \frac{(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!}(a-1)^{n+1} & & (1+\theta_r x)^{r-n-1} \\ \downarrow r \to 0 & & \downarrow r \to 0 & & \downarrow r \to 0 & & \\ f_a'(0) & & \sum_{k=1}^{n} \frac{(a-1)^k(-1)^{-k-1}}{k!} & & \frac{(a-1)^{n+1}(-1)^n}{(n+1)!} \neq 0 & & \end{array}$$

On en déduit que $((1+\theta_r x)^{r-n-1})$ converge quand $r\to 0$ vers $\frac{f_a'(0)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(a-1)^k(-1)^{-k-1}}{k!}}{\frac{(a-1)^{n+1}(-1)^n}{(n+1)!}}$.

On note l cette limite.

- Si $x=0$, $\quad a=1$ θ_r peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1 et donc on peut prendre $\theta_0''=0$.
- Si $x\neq 0$: Montrons que $\lim_{r\to 0,\, r\in\mathbb{Q}}\theta_r$ existe.
  En effet considèrons deux suites de rationnels (s_n) et (t_n) convergeant vers 0 telles que (θ_{s_n}) et (θ_{t_n}) convergent respectivement vers θ_1 et θ_2.
  Montrons que $\theta_1=\theta_2$.
  On a :
  $$(1+\theta_{s_n}x)^{s_n-n-1}\to_{n\to+\infty}(1+\theta_1 x)^{-n-1}$$
  et
  $$(1+\theta_{t_n}x)^{t_n-n-1}\to_{n\to+\infty}(1+\theta_2 x)^{-n-1}$$
  Par conséquent, $(1+\theta_1 x)^{-n-1}=l=(1+\theta_2 x)^{-n-1}$ et $(\frac{1+\theta_1 x}{1+\theta_2 x})^{n+1}=1$.
  Or $\frac{1+\theta_1 x}{1+\theta_2 x}>0$ car $x>-1$ et θ_1 et θ_2 sont entre 0 et 1 (tous les θ_r sont entre 0 et 1), donc $\frac{1+\theta_1 x}{1+\theta_2 x}=1$ et $\theta_1=\theta_2$.
  $$\lim_{r\to 0}\theta_r=\theta_0''\in]0,1[$$

Et on a la formule :

$$\mu(f_a)=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(a-1)^n}{n}+(-1)^n\frac{(a-1)^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+\theta_0''(a-1))^{n+1}}$$

A présent, montrons que $1+\theta_0''(a-1)$ est compris entre 1 et a.

- Si $a=1$: $1+\theta_0''(a-1)=1$
- Si $a<1$: $1+a-1\leq 1+\theta_0''(a-1)\leq 1$
- Si $a>1$: $1\leq 1+\theta_0''(a-1)\leq 1+a-1=a$.

Donc $1+\theta_0''(a-1)$ est compris entre 1 et a.

8) On pose $\lambda=\mu\circ\alpha :]0,\ +\infty[\to\mathbb{R}$.

a) Soit $a,\ b\in]0,\ +\infty[$ et $r\in\mathbb{Q}$.

$a-1)$ $\quad\lambda(1)=\mu(\alpha(1))=\mu(f_1)=0$

$a-2)$ $\quad\lambda(\gamma)=\mu(f_\gamma)=1$.

$a-3)$ $\quad$ On a : $f_\gamma(\mu(f_{\gamma^r}))=\gamma^r$ (d'après $7-c)$) donc
. $\quad\lambda\circ f_\gamma(r)=\mu(\alpha(\gamma^r))=\mu(f_{\gamma^r})=\mu(f_\gamma^r)=r$ (d'après $7-a)$).

$a-4)$ $\quad f_\gamma\circ\lambda(a)=f_\gamma(\mu\circ\alpha(a))=f_\gamma(\mu(f_a))=a$ (d'après $7-c)$).

$a-5)\quad \lambda(ab)=\mu(\alpha(ab))=\mu(\alpha(a)\alpha(b))=\mu(\alpha(a))+\mu(\alpha(b))=\lambda(a)+\lambda(b).$

$a-6)\quad \lambda(a\times\frac{1}{a})=\lambda(a)+\lambda(\frac{1}{a})=0$ donc
. $\lambda(\frac{1}{a})=-\lambda(a).$

$a-7)\quad \lambda(\frac{a}{b})=\lambda(a)+\lambda(\frac{1}{b})=\lambda(a)-\lambda(b).$

$a-8)\quad \lambda(a^r)=\mu(\alpha(a^r))=\mu((\alpha(a))^r)=r\mu(\alpha(a))=r\lambda(a).$

b)

$b-1)$ si $a\neq 1$: En appliquant $3-7-d)$ à $n=2$
$\lambda(a)=\mu(f_a)=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3(1+\theta_0''(a-1))^3}.$
Donc
$\frac{\lambda(a)-\lambda(1)}{a-1}=1-\frac{a-1}{2}+\frac{(a-1)^2}{3(1+\theta_0''(a-1))^3}.$
Donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lambda(a)-\lambda(1)}{a-1}-1\right| &\leq |a-1|\left|1+\frac{|a-1|}{3}\underbrace{\frac{1}{(1+\theta_0''(a-1))^3}}_{\text{est entre } a^3 \text{ et } 1}\right|\\ &\leq |a-1|\left|1+\frac{|a-1|}{3}\left(\frac{1}{a^3}+1\right)\right|\\ &\to_{a\to 1} 0\end{aligned}$$

Donc λ est dérivable en 1 et $\lambda'(1)=1$.
Soit maintenant $x>0$ et $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $x+h>0$.

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(x+h)-\lambda(x)}{h} &= \frac{\lambda(x)+\lambda(1+\frac{h}{x})-\lambda(x)}{h}\\ &= \frac{\lambda(1+\frac{h}{x})-\lambda(1)}{x\times\frac{h}{x}}\\ &\to_{h\to 0} \frac{\lambda'(1)}{x}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Donc λ est continue (car dérivable) et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda'(x)=\frac{1}{x}\forall x\in\mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\lambda'>0$).

$b-2)$ $3-8-a-3)$ montre que $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\lambda\circ f_\gamma(r)=r$ et comme $\lambda\circ f_\gamma$ est continue sur $\mathbb{R}$ le lemme de prolongement des identités montre que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda\circ f_\gamma(x)=x.$$

De plus,

$$\forall a > 0,\ f_\gamma \circ \lambda(a) = a$$

donc λ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et f_γ est sa bijection réciproque.

$b-3)$ Soit $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lambda(\gamma^n) = n$.
Donc si $x \geq \gamma^n \geq 2^n$, on a, par croissance de λ :
$\lambda(x) \geq \lambda(\gamma^n) = n$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \lambda(x) = +\infty.$$

Pour la limite en 0^+ on propose deux méthodes :

– Première méthode Si $x \leq \gamma^{-n} \leq 2^{-n}$,
$\lambda(x) \leq \lambda(\gamma^{-n}) = -n$; donc

$$\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = -\infty$$

– Deuxième méthode En posant $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} -\lambda(\frac{1}{x}) = \lim_{X\to 0^+} -\lambda(X) = -\lim_{X\to 0^+} \lambda(X)$$

donc

$$\lim_{X\to 0^+} \lambda(X) = -\infty$$

Soit maintenant $x > 0$; on pose $x = f_\gamma(X)$.

$$\frac{\lambda(x)}{x^r} = \frac{\lambda \circ f_\gamma(X)}{f_\gamma(X)^r} = \frac{X}{f_\gamma(X)^r} = \Big(\frac{X^{\frac{1}{r}}}{f_\gamma(X)}\Big)^r$$

or $X = \lambda(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{x^r} = 0$$

De même si $x \to 0^+$, $X = \lambda(x) \to -\infty$ et donc
$x^r \lambda(x) = X f_\gamma(X)^r \to_{X\to-\infty} 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^r \lambda(x) = 0$$

e) Soit $r \in \mathbb{Q}$.
$f_a(r) = a^r = f_\gamma(\lambda(a^r))$.

$$f_a(r) = f_\gamma(r\lambda(a))$$

f_a est continue donc d'après le lemme de prolongement des identités

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = f_\gamma(x\lambda(a))$$

Partie 4

Soit x réel et $n \in \mathbb{N}^*$.

1)

a) Si $x > 0$, $t_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^n \underbrace{C_n^k (\frac{x}{n})^k}_{>0}$

Donc $t_n(x) > 1$.

b)

$$\begin{aligned} t_n(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^n x^k \frac{C_n^k}{n^k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \end{aligned}$$

Or $(1 - \frac{p}{n}) \leq 1$ pour $p \leq n$ donc
$t_n(x) \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = S_n(x)$. On en déduit que $t_n(x) \leq \lim_{p \to +\infty} S_p(x)$ et que $(t_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
De plus,

$$\begin{aligned} t_{n+1}(x) - t_n(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \underbrace{\left[(1 - \dfrac{1}{n+1})(1 - \dfrac{2}{n+1}) \cdots (1 - \dfrac{k-1}{n+1}) - (1 - \dfrac{1}{n})(1 - \dfrac{2}{n}) \cdots (1 - \dfrac{k-1}{n}) \right]}_{>0} \\ &+ \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} (1 - \tfrac{1}{n+1})(1 - \tfrac{2}{n+1}) \cdots (1 - \tfrac{n}{n+1}) > 0 \end{aligned}$$

donc $(t_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ; comme elle est majorée, elle converge.

2) $t_n(0) = 1 \ \forall n$, donc $t_n(0) \to_{n \to +\infty} 1$.

3-a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} |t_n(x)t_n(-x)-1| = \left|(1-\tfrac{x^2}{n^2})^n - 1\right| &= \left|1+\textstyle\sum_{k=1}^{n} x^{2k}(-1)^k \frac{C_n^k}{n^{2k}} - 1\right| \\ &= \tfrac{1}{n}\left|n\textstyle\sum_{k=1}^{n} x^{2k}(-1)^k \frac{C_n^k}{n^{2k}}\right| \\ &\leq \tfrac{1}{n}\left|\textstyle\sum_{k=1}^{n} (n\frac{x^2}{n^2})^k C_n^k\right| \\ &\leq \tfrac{1}{n}\left|\textstyle\sum_{k=1}^{n} (\frac{x^2}{n})^k C_n^k\right| \\ &= \tfrac{1}{n}\left[t_n(x^2)-1\right] \end{aligned}$$

Donc

$$|t_n(x)t_n(-x)-1| \leq \frac{1}{n}\left[f_\gamma(x^2)-1\right] \to_{n\to+\infty} 0$$

$$t_n(x)t_n(-x) \to_{n\to+\infty} 1$$

D'où $(t_n(x))$ converge si $x<0$ et $\lim_{n\to+\infty} t_n(x) = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} t_n(-x)}$.

b)

- Si $x>0$: $w_n(-x) = \frac{1}{t_n(x)} = \frac{1}{w_n(x)}$
- Si $x=0$: $w_n(0) = 1 = \frac{1}{w_n(0)}$
- Si $x<0$: $w_n(-x) = t_n(-x) = \frac{1}{w_n(x)}$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ w_n(-x) = \frac{1}{w_n(x)}$$

5)

a) Soit $x,\ y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|t_n(x)t_n(y) - t_n(x+y)| &= \left|((1+\tfrac{x}{n})(1+\tfrac{y}{n}))^n - (1+\tfrac{x+y}{n})^n\right| \\
&= \left|(1+\tfrac{xy}{n^2}+\tfrac{x+y}{n})^n - (1+\tfrac{x+y}{n})^n\right| \\
&= \left|(1+\tfrac{x+y}{n})^n + \textstyle\sum_{k=1}^n (\tfrac{xy}{n^2})^k(\tfrac{x+y}{n})^{n-k}C_n^k - (1+\tfrac{x+y}{n})^n\right| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=1}^n (\tfrac{|xy|}{n^2})^k(\tfrac{|x+y|}{n})^{n-k}C_n^k \\
&\leq \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^n (\tfrac{|xy|}{n})^k(\tfrac{|x+y|}{n})^{n-k}C_n^k \\
&\leq \tfrac{1}{n}\left[\textstyle\sum_{k=0}^n (\tfrac{|x+y|}{n})^{n-k}\right]\left[\textstyle\sum_{k=1}^n (\tfrac{|xy|}{n})^k\right] \\
&= \tfrac{1}{n}t_n(|x+y|)\left[t_n(|xy|)-1\right]
\end{aligned}$$

En faisant $n \to +\infty$ on obtient :

$$h(x)h(y) = h(x+y)$$

b)
- Si $x > 0$, $\quad w_n(y) = t_n(y) \ \ \forall y \in [\frac{x}{2},\ \frac{3x}{2}]$ donc

$$\begin{aligned}
w_n'(x) = \lim_{y\to x,\, y\neq x} \tfrac{w_n(y)-w_n(x)}{y-x} &= \lim_{y\to x,\, y\neq x} \tfrac{t_n(y)-t_n(x)}{y-x} \\
&= t_n'(x) \\
&= (1+\tfrac{x}{n})^{n-1} \\
&= \tfrac{t_n(x)}{1+\frac{x}{n}} \to_{n\to+\infty} h(x)
\end{aligned}$$

- Si $x < 0$: on a de même $w_n'(x) = (y \mapsto \frac{1}{t_n(-y)})'(x) = \frac{t_n'(-x)}{t_n^2(x)} \to_{n\to+\infty} \frac{h(-x)}{h^2(-x)} = h(x)$ car $h(-x) = \frac{1}{h(x)}$
- Si $x = 0$: $w_n'(0) = 1 = h(0) \qquad \forall n$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} w_n'(x) = h(x)$$

c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $w_n(x) - w_n(1) = \int_1^x w_n'(t)dt$.
Et en passant à la limite dans les deux membres, on obtient :

$$h(x) - h(1) = \int_1^x h(t)dt$$

Et en dérivant les deux membres

$$h'(x) = h(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

d) On a $h'(0) = h(0) = 1$.
De plus, $h \in \mathcal{D}$ et $h'(0) = f'_\gamma(0) = 1$.
Donc d'après $3-3-c-1)$, $h = f_\gamma$.