Concours Général Sénégalais 99 : Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée : 6 heures

Partie 1

A

1.

a) Les solutions de (e) sont les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1$.

b) En posant $w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, les solutions de (e) sont les $w_n^p, 0 \leq p \leq n-1$.

2. On pose $Z_p = w_n^p, 0 \leq p \leq n-1$.

$Z_1(Z_0+Z_1+\cdots+Z_{n-1}) = w_n(1+w_n+\cdots+w_n^{n-1}) = w_n+\cdots+w_n^{n-1}+\underbrace{w_n^n}_{=1} = Z_0+Z_1+\cdots+Z_{n-1}$.

donc $\underbrace{(Z_1-1)}_{\neq 0}(Z_0+Z_1+\cdots+Z_{n-1}) = 0$

D'où $Z_0+Z_1+\cdots+Z_{n-1} = 0$.

3.

$$\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = \prod_{p=0}^{n-1} w_n^p = w_n^{\sum_{p=0}^{n-1} p} = w_n^{\frac{n(n-1)}{2}} (\prod_{p=0}^{n-1} Z_p)^2 = (w_n^n)^{n-1} = 1^{n-1} = 1.$$

donc

$$\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = \pm 1$$

- Si n est impair, $n = 2k+1$:
  $\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = (w_n^k)^n = 1$.
- Si n est pair, $n = 2k$
  $\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = (w_n^k)^{n-1} \frac{1}{w_n^k} = \frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{2k}}} = e^{-i\pi} = -1$

4.

a) On considère le polynôme : $P(Z) = b_n(Z-\alpha_1)\cdots(Z-\alpha_n)$.
En considèrant le terme constant de P dans les deux expressions :
$b_n(-1)^n \prod_{p=1}^{n} \alpha_p = b_0$ donc

$$\prod_{p=1}^{n} \alpha_p = (-1)^n \frac{b_0}{b_n}.$$

b) En considérant le terme de degré $n-1$ de P, on obtient
$b_{n-1} = -b_n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$.
donc

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_p = -\frac{b_{n-1}}{b_n}.$$

5. On pose $P(Z) = Z^n - 1$ Les racines de P sont les $Z_p, 0 \leq p \leq n-1$.
D'après $1-4)$ $a)$ et $b)$

$$\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = (-1)^n \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} Z_p = \frac{-0}{1} = 0$$

6.

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \cos(\frac{2p\pi}{n}) = \sum_{p=1}^{n} \Re(e^{\frac{i2p\pi}{n}}) = \sum_{p=1}^{n} \Re(Z_p) = \Re(\sum_{p=1}^{n} Z_p) = \Re(0) = 0$$

B

1.

a) Soit β une racine d'ordre n de l'unité i.e. pour $1 \leq k \leq n-1, \beta^k \neq 1$ et $\beta^n = 1$.
$Q(X) = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + nX^{n-1}$
Posons $P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}$
On a : $P'(X) = Q(X)$ et $(X-1)P(X) = X^{n+1} - 1$. En dérivant $P(X) + (X-1)Q(X) = (n+1)X^n$.
En évaluant en β :
$P(\beta) + (\beta - 1)Q(\beta) = (n+1)\beta^n = n+1$
donc $Q(\beta) = \frac{n+1-\frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}}{\beta-1}$ or
$\beta^{n+1} = \beta^n\beta = \beta$ donc

$$Q(\beta) = \frac{n}{\beta - 1}$$

b) n=4 : $\{Z_p\}_{0 \leq p \leq 3} = \{\pm 1, \pm i\}$

$$\prod_{p=0}^{3} Q(Z_p) = \underbrace{Q(1)}_{=\frac{n(n+1)}{2}} \times \underbrace{Q(-1)}_{=\frac{n}{-2}} \times \underbrace{Q(i)}_{=\frac{n}{i-1}} \times \underbrace{Q(-i)}_{=\frac{n}{-i-1}}$$

$$\prod_{p=0}^{3} Q(Z_p) = \frac{n^4(n+1)}{(-2)^3} = \frac{2^8 \times 5}{-2^3} = -5 \times 2^5.$$

2. Dans le cas général On a pour $1 \leq p \leq n-1$;

$$\begin{aligned}
|Z_p - 1|^2 &= |Z_p - 1|^2 \\
&= \left|e^{i\frac{2p\pi}{n}} - 1\right|^2 \\
&= (\cos(\frac{2p\pi}{n}) - 1)^2 + \sin^2(\frac{2p\pi}{n}) \\
&= (2\sin^2(\frac{p\pi}{n}))^2 + (2\sin(\frac{p\pi}{n})\cos(\frac{p\pi}{n}))^2 \\
&= 4\sin^2(\frac{p\pi}{n})
\end{aligned}$$

– Si $n = 2k$

$$\begin{aligned}
\prod_{p=0}^{n-1} Q(Z_p) &= Q(1)Q(-1)\prod_{p=1}^{k-1} Q(Z_p)\prod_{p=1}^{k-1} Q(\overline{Z_p}) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{-n}{2} \times \prod_{p=1}^{k-1} \frac{n^2}{|Z_p - 1|^2} \\
&= \frac{-n^{2k}(n+1)}{2^2} \prod_{p=1}^{k-1} \frac{1}{4\sin^2(\frac{p\pi}{n})} \\
&= -(\frac{n}{2})^n \times \frac{n+1}{\prod_{p=1}^{k-1}\sin^2(\frac{p\pi}{n})}
\end{aligned}$$

$$\prod_{p=0}^{n-1} Q(Z_p) = -(\frac{n}{2})^n \times \frac{n+1}{\prod_{p=1}^{k-1}\sin^2(\frac{p\pi}{n})} \qquad n = 2k$$

– Si $n = 2k+1$

$$\prod_{p=0}^{n-1} Q(Z_p) = Q(1)\prod_{p=1}^{k} Q(Z_p)\prod_{p=1}^{k} Q(\overline{Z_p}) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n^2}{\sin^2(\frac{p\pi}{n})} = (\frac{n}{2})^n \times \frac{n+1}{\prod_{p=1}^{k}\sin^2(\frac{p\pi}{n})}$$

Dans les deux cas

$$\prod_{p=0}^{n-1} Q(Z_p) = (-1)^{n-1}(\frac{n}{2})^n \times (n+1)(\prod_{p=1}^{E(n/2)} \sin^2(\frac{p\pi}{n}))^{-1}$$

C

1.

- Si $n \mid p : p = r \times n, r \in \mathbb{N}^*$.
  $w_n^p = w_n^{r\times n} = (w_n^n)^r = 1^r = 1$
  donc
$$S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$
- Si $n \nmid p : w_n^p \neq 1$
$$S_n(p) = \frac{1 - w_n^{np}}{1 - w_n^p} = 0$$

2. Soient p et q deux entiers relatifs :

$$T_n(p,q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} w_n^{kq} = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{k(p+q)} = S_n(p+q)$$

$$V_n(p,q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} w_n^{-kq} = S_n(p-q)$$

D'après C 1.
On a :
$$T_n(p,q) = \begin{cases} n & \text{si } n \mid p+q \\ 0 & \text{si } n \nmid p+q \end{cases}$$
et
$$V_n(p,q) = \begin{cases} n & \text{si } n \mid p-q \\ 0 & \text{si } n \nmid p-q \end{cases}$$

D

1. $Z^n - 1 = \prod_{p=0}^{n-1}(Z - Z_p)$
En dérivant :

$$nZ^{n-1} = \sum p = 0^{n-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{n-1} (Z - Z_j)$$

En évaluant en $Z = 1$ et en prenant le module dans les deux membres
$|n| = \left|\prod_{j=0}^{n-1}(1 - Z_j)\right| = \prod_{j=0}^{n-1} 2\sin(\frac{j\pi}{n})$
$n = 2^{n-1} \prod_{p=0}^{n-1} \sin(\frac{p\pi}{n})$ donc

$$\prod_{p=0}^{n-1} \sin(\frac{p\pi}{n}) = n \times 2^{1-n}$$

2. Si n est pair, $n = 2k$: Pour $0 < p < k$

$$\begin{aligned} \sin\frac{(2k-p)\pi}{2k} &= \sin(\pi - \frac{p\pi}{2k}) \\ &= \sin(\frac{p\pi}{2k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^{2k-1} \sin(\frac{p\pi}{2k}) &= \prod_{p=1}^{k-1} \sin(\frac{p\pi}{2k}) \sin\frac{(2k-p)\pi}{2k} \\ &= (\prod_{p=1}^{k-1} \sin(\frac{p\pi}{2k}))^2 \end{aligned}$$

Si n est impair, $n = 2k+1$.

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^{2k} \sin(\frac{p\pi}{2k+1}) &= \prod_{p=1}^{k-1} \sin(\frac{p\pi}{2k+1}) \prod_{p=1}^{k} \sin\frac{(2k+1-p)\pi}{2k+1} \\ &= (\prod_{p=1}^{k} \sin(\frac{p\pi}{2k+1}))^2 \end{aligned}$$

Donc

$$P_1 = \prod_{p=1}^{n-1} \sin(\frac{p\pi}{2n}) = \sqrt{2n \times 2^{1-2n}} = 2^{1-n}\sqrt{n}$$

$$P_2 = \prod_{p=1}^{n} \sin(\frac{p\pi}{2n+1}) = \sqrt{(2n+1) \times 2^{1-(2n+1)}} = 2^{-n}\sqrt{2n+1}$$

E

On rappelle le lemme de Gauss :

Lemme 1 (Gauss)**.** *Soit a, b, c 3 entiers naturels non nuls. Si a divise le produit bc et si a est premier avec c alors a divise b.*

1. La condition est suffisante :

Supposons que pour tout $m < n$, $Z_p^m = e^{i\frac{2pm\pi}{n}} \neq 1$.

De manière équivalente pour tout $m < n$, $n \nmid pm$.

Si $d \mid n$ avec $1 < d < n$, $n \nmid \frac{n}{d}p$ car $1 < \frac{n}{d} < n$ donc $d \nmid p$.

n et p n'ont pas de diviseur commun autre que ± 1 donc p et n sont premiers entre eux.
Réciproquement,supposons que p et n sont premiers entre eux.

D'après le lemme de Gauss :

Si $n \mid mp$ alors $n \mid m$, donc pour $1 < m < n, n \nmid mp$.

Donc $e^{i\frac{2pm\pi}{n}} \neq 1$ et Z_p est une racine d'ordre n de l'unité, donc la condition est nécessaire.

2. Le degré de Φ_n est le nombre d'entiers $1 \leq m < n$ tel que m et n sont premiers entre eux. On le note $\phi(n)$: ϕ est l'indicatrice d'Euler.

3. Si n est premier, alors pour tout $m \in [\![1, n-1]\!]$, m et n sont premiers entre eux donc

$$\Phi_n(Z) = \frac{Z^n - 1}{Z - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} Z^k$$

4. Si $n = 2$ $\omega_2 = e^{\frac{i2\pi}{2}} = -1 \qquad \omega_4 = e^{\frac{i2\pi}{4}} = i$

$\Phi_4(Z) = (Z - \omega_4)(Z - \omega_4^3) = (Z - i)(Z + i) = Z^2 + 1$

$\Phi_2(Z) = Z - 1$

Montrons que $\Phi_{2n}(Z) = \Phi_n(-Z)$.

Soit n un nombre premier impair : $n = 2p + 1$

Les entiers compris entre 1 et $2n$ et non premiers avec $2n$ sont les $2k, 1 \leq k \leq n-1$ et n. On en déduit que :

$$\Phi_{2n}(Z) = \prod_{\substack{k=0 \\ 2k+1 \neq n}}^{n-1} (Z - \omega_{2n}^{2k+1}) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n-1} (Z - \omega_{2n}^{2k+1})$$

or pour $0 \leq k \leq n-1$.

On a par ailleurs :

$$\Phi_n(-Z) = \prod_{k=1}^{n-1}(-Z - \omega_n^k) = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}(Z + \omega_n^k) = \prod_{k=1}^{n-1}(Z + \omega_n^k)$$

car $n-1$ est pair

$$\Phi_{2n}(Z) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n-1} (Z - \omega_{2n}^{2k+1})$$

Il suffit de montrer que

$$\{\omega_{2n}^{2k+1}, 0 \leq k \leq n-1, k \neq p\} = \{-\omega_n^k, 1 \leq k \leq n-1\}$$

Les deux ensembles ont pour cardinal $n-1$ (leurs éléments sont 2 à 2 distincts).
De plus leurs éléments sont des racines énièmes de -1. En effet :
$(\omega_{2n}^{2k+1})^n = (\omega_{2n})^{2nk}\omega_{2n}^n = \omega_{2n}^n = -1$
et $(-\omega_n^k)^n = (-1)^n\omega_n^{nk} = (-1)^n = -1$.
Or, il y a $n-1$ racines énièmes de -1 différentes de -1.
Donc ces deux ensembles sont tous les deux égaux à l'ensemble des racines énièmes de -1 privé de -1. D'où le résultat.

$$\Phi_{2n}(Z) = \Phi_n(-Z)$$

F : Applications

1. 5 est premier impair donc
$\Phi_5(Z) = 1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4$
et $\Phi_{10}(Z) = \Phi_5(-Z) = 1 - Z + Z^2 - Z^3 + Z^4$.

2. L'ensemble des diviseurs de 12 est $div(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

$$\begin{array}{rcl}
\Phi_1(Z) & = & Z - 1 \\
\Phi_2(Z) & = & Z + 1 \\
\Phi_3(Z) & = & Z^2 + Z + 1 \\
\Phi_4(Z) & = & (Z - i)(Z - i^2) = Z^2 + 1 \\
\omega_6 & = & e^{i2\pi/6} = e^{i\pi/3} \\
\Phi_6(Z) & = & \Phi_3(-Z) = Z^2 - Z + 1
\end{array}$$

$\omega_{12} = e^{i\pi/6}$ et $\Phi_{12}(Z) = (Z - \omega_{12})(Z - \omega_{12}^5)(Z - \omega_{12}^7)(Z - \omega_{12}^{11})$
or $\omega_{12}^6 = -1$ donc

$$\begin{array}{rcl}
\Phi_{12}(Z) & = & (Z - \omega_{12})(Z + \omega_{12}^{-6}\omega_{12}^5)(Z - \omega_{12}^6\omega_{12})(Z - \omega_{12}^{-1}) \\
& = & (Z - \omega_{12})(Z + \omega_{12}^{-1})(Z + \omega_{12})(Z - \omega_{12}^{-1}) \\
& = & (Z^2 - \omega_{12}^2)(Z^2 - \omega_{12}^{-2}) \\
& = & (Z^2 - \omega_6)(Z^2 - \omega_6^{-1}) \\
& = & Z^4 - 2\cos(\pi/3)Z^2 + 1
\end{array}$$

$\Phi_{12}(Z) = Z^4 - Z^2 + 1$

On a :

$\Phi_1\Phi_3 = (Z-1)(Z^2+Z+1)$ qui est une identité remarquable : $\Phi_1\Phi_3 = Z^3-1$
De même, $\Phi_2\Phi_6 = (Z+1)(Z^2-Z+1) = Z^3+1$.
On en déduit $\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_6 = (Z^3-1)(Z^3+1) = Z^6-1$.
$\Phi_4\Phi_{12} = (Z^2+1)(Z^4-Z^2+1) = Z^6-1$.
On en déduit que

$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_{12} = (Z^6-1)(Z^6+1) = Z^{12}-1$$

Dans le cas général, on peut penser que pour $n \in N^*$:

$$\prod_{d|n} \Phi_d(Z) = Z^n - 1$$

Même si le sujet ne le demande pas, la démonstration de ce théorème est intéressante :

Notons $div(n)$ l'ensemble des diviseurs de n, $div(n) = \{d \in \{1, \cdots, n\} \ / \ d \mid n\}$

Lemme 2. *Soit* $n \in N^*$, $p \in \{1, \cdots, n\}$ *et* $Z_p = e^{i2\frac{p\pi}{n}}$

Soit U_n *l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.*

On appelle ordre de Z_p *dans* U_n *le plus petit entier* $k > 0$ *tel que* $Z_p^k = 1$*. L'ordre de* Z_p *dans* U_n *divise* n*.*

Démonstration. D'abord k existe et est dans $\{1, \cdots, n\}$ car $Z_p^n = 1$

Faisons la division euclidienne de n par k.

$n = qk + r$, q est le quotient et r le reste : $q \in N^*$ et $0 \leq r < k$

On a donc $1 = Z_p^n = Z_p^{qk+r} = (Z_p^k)^q \times Z_p^r = Z_p^r$ car $Z_p^k = 1$.

Donc $Z_p^r = 1$.

Comme k est le plus petit entier strictement positif tel que $Z_p^k = 1$, on a forcément $r = 0$

donc $n = qk$ et $k \mid n$. □

On a donc $\{1, \cdots, n\} = \bigcup_{d \in div(n)} \{p \in \{1, \cdots, n\} \ / \ \text{ordre}(Z_p) = d\}$ donc

$$\begin{aligned} Z^n - 1 &= \prod_{p=1}^{n}(Z - Z_p) \\ &= \prod_{d \in div(n)} \prod_{p \in \{1,\cdots,n\} \ / \ \text{ordre}(Z_p) \text{ dans } U_n = d\}} (Z - Z_p) \\ &= \prod_{d \in div(n)} \prod_{p \in \{1,\cdots,n\} \ / \ Z_p \text{racine primitive d'ordre } d \text{ de l'unité}} (Z - Z_p) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité vient de la question $E-1)$ qui dit que
Z_p est racine primitive d'ordre d de l'unité
ssi quelque soit l'entier $m < d$, Z_p n'est pas une racine m-ième de l'unité
ssi quelque soit l'entier $m < d$, $Z_p^m \neq 1$
ssi l'ordre de Z_p dans U_d est exactement d

donc $Z^n - 1 = \prod_{d \in div(n)} \Phi_d(Z) \qquad (E)$

On note pour $d \in \mathbb{N}^*$, $\phi(d)$ le degré du polynôme cyclotomique Φ_d. ϕ est la fonction d'Euler. $\phi(d)$ calcule le nombre d'entiers entre 1 et d premiers avec d. En prenant les degrés dans la relation (E), on obtient :

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

Cette relation est très utile en théorie des groupes, mais cette relation sort déjà largement du programme des classes de Terminales.
On peut remarquer que les Φ_n calculés sont tous à coefficients dans ± 1 mais ce n'est vrai que pour $n \leq 105$.

Partie 2

A

1. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^{2n} - 1$ sont les $e^{\frac{i2k\pi}{2n}}, 1 \leq k \leq 2n$

$$\{e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}, 1 \leq k \leq n-1\} = \{\underbrace{e^{\frac{i4n\pi}{2n}}}_{=1} e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}, 1 \leq k \leq n-1\} = \{e^{\frac{i2(2n-k)\pi}{2n}}, 1 \leq k \leq n-1\}$$

donc

$$\begin{aligned} Z^{2n} - 1 &= (Z - e^{\frac{i4n\pi}{2n}})(Z - e^{\frac{i2n\pi}{2n}}) \prod_{k=1}^{n-1} (Z - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(Z - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) \\ &= (Z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (Z - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(Z - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) \end{aligned}$$

2.

a) En évaluant le polynôme $Z^{2n} - 1$ en a on obtient :
$a^{2n} - 1 = (a^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}})$
donc

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} (a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) &= (a+1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} (a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) \\ &= (a+1)^2 \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) = \frac{(a+1)(a^{2n} - 1)}{a - 1}$$

b) On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$(a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) = a^2 - (e^{\frac{i2k\pi}{2n}} + e^{-\frac{i2k\pi}{2n}})a + 1 = a^2 - 2a\cos\frac{k\pi}{n} + 1$$

D'où

$$\prod_{k=1}^{n}(a^2 - 2a\cos\frac{k\pi}{n} + 1) = \frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1}$$

3. D'après les sommes de Riemann

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k\pi}{n}) \rightarrow_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(x)dx = J(a)$$

B

1.

a) Si $|a| < 1$:

$$\frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1} \rightarrow_{n\to+\infty} \frac{1+a}{1-a}$$

b) Si $|a| > 1$,

$$\frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1} = \frac{a^{2n+1}(1-a^{-2n})(1+a^{-1})}{a-1}$$

On pose $h_n = (1 - a^{-2n})(1 + a^{-1})$.
$h_n > 0$ et $h_n \rightarrow_{n\to+\infty} 1 + a^{-1}$
On pose

$$b_n = \frac{2\pi}{n}\ln\frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1}$$

Soit $\epsilon = \pm 1$ le signe de a :

$\epsilon = \frac{a}{|a|}$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2\pi}{n}\ln\left[\frac{(\epsilon\,|a|)^{2n+1}}{\epsilon\,|a|-\epsilon^2}h_n\right]\\
&= \frac{2\pi}{n}\ln\left[\frac{\epsilon^{2n+1}\,|a|^{2n+1}}{\epsilon\,|a|-\epsilon^2}h_n\right]\\
&= \frac{2\pi}{n}\ln\left[\frac{|a|^{2n+1}}{|a|-\epsilon}h_n\right]\\
&= \frac{2\pi}{n}\left[(2n+1)\ln|a| + \frac{1}{|a|-\epsilon} + \ln h_n\right]\\
&= 4\pi\ln|a| + \underbrace{\frac{2\pi}{n}\ln|a|}_{\to_{n\to+\infty}0} + \underbrace{\frac{2\pi}{n}\ln\frac{1}{|a|-\epsilon}}_{\to_{n\to+\infty}} + \overbrace{\frac{2\pi}{n}\qquad\underbrace{\ln h_n}_{\to_{n\to+\infty}\ln 1+a^{-1}}}^{\to_{n\to+\infty}0}
\end{aligned}$$

Donc

$$b_n \to_{n\to+\infty} 4\pi\ln|a|\,.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
J(a) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a^2-2a\cos\frac{k\pi}{n})\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}(1+a^2-2a\cos\frac{k\pi}{n})\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$I(a) = 2J(a) = \lim_{n\to+\infty} b_n = 4\pi\ln|a|$$

.