UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 18bis A 01
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (4 pts).

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz.
Le premier jour de l'année, il y'a deux 2 chances sur 5 qu'elle propose du riz.
Si elle en propose un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain.
Si elle n'en propose pas un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain.
On appelle J_n l'événement "la cantine propose du riz le $n^{\text{ième}}$ jour" et K_n l'événement "la cantine n'en propose pas le $n^{\text{ième}}$ jour".
Soit p_n la probabilité de l'événement J_n.

1. Déterminer $p\Big(J_2/J_1\Big)$ et $p\Big(J_2/K_1\Big)$. En déduire p_2. **0,25+0,5+0,5=1,25 pt**

2. Montrer que $p_n = -\dfrac{1}{3}p_{n-1} + \dfrac{2}{3}$. **0,75 pt**

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = p_n - \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. **0,5 pt**

b) Calculer u_n puis p_n en fonction de n. **0,5 +0,25= 0,75 pt**

c) Un élève de l'établissement, fin mathématicien, ne mange à la cantine que les jours pairs.

Montrer qu'à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{8}{15}$. **0,75 pt**

EXERCICE 2 (4 pts). Dans un système de numération de base a, on considère les nombres

$$A = \overline{211},\ B = \overline{312} \text{ et } C = \overline{133032}.$$

1. Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3. **0,25 pt**

2. a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. **0,5 pt**

b) En déduire que a divise 8. **0,25 pt**

c) Déterminer alors a. **0,5 pt**

3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base 4. **0,25 pt**

4. Dans cette question on suppose que $a = 4$.

a) Ecrire A, B et C dans le système décimal. **0,75 pt**

b) Montrer alors que $C = A \times B = \text{ppcm }(A,\ B)$.

En déduire que l'équation : $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$. **0,25+0,5=0,75 pt**

5. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$.
a) Vérifier que $(19,\ -13)$ est une solution de cette équation. **0,25 pt**
b) Résoudre cette équation. **0,5 pt**

PROBLEME (12 points).

Le problème est composé de trois parties A, B et C.
Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment de la partie A
Le plan euclidien (P) est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$
On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = \frac{x}{ax - a + 1},$$

où a est un réel différent de 0 et de 1.
On note C_a la courbe représentative de f_a dans le repère $\mathcal{R}$.

Partie A: (5,5 pts)

1. a) Montrer que l'application φ de (P) dans (P) définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= -y + 1 \\ y' &= -x + 1 \end{cases}$$

est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation que l'on précisera. **0,5 pt**
b) Déterminer l'ensemble de définition D_{f_a} de f_a et montrer que la courbe C_a est globalement invariante par φ.
0,5 pt

2. a) Montrer que toutes les courbes C_a passent par deux points fixes indépendants de a.
0,25 pt
b) Déterminer les points fixes de f_a, c'est à dire les réels ℓ tels que $f_a(\ell) = \ell$. **0,25 pt**

3. a) Etudier les variations de f_a ; on discutera suivant les valeurs de a. **0,5 pt**
b) Construire dans le repère $\mathcal{R}$ les courbes $C_{-2},\ C_{0,5}$
(On prendra pour unité graphique 1 cm). **0,5+0,25=0,75 pt**
c) Construire dans un même repère orthonormé d' unité graphique 2 cm les courbes $C_{1,5}$ et C_2. **0,25+0,25=0,5 pt**

4. Soit F la fonction de $]-\infty,\ 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(a) = \int_0^1 f_a(x)\, dx \text{ et } F(0) = \int_0^1 x\, dx.$$

a) Montrer que pour tout $a < 1$ et $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto ax - a + 1$ est strictement positive dans $[0,\ 1]$.
Etablir alors que la fonction F est définie sur $]-\infty,\ 1[$. **0,25+0,25=0,5 pt**
b) En faisant le changement de variable $t = ax - a + 1$, vérifier que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1-a}{a^2}\ln(1-a).$$

Déterminer alors $\lim\limits_{a \to 1^-} F(a)$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} F(a)$. **0,25 × 3=0,75 pt**
c) Démontrer que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$\forall x \in [0, 1],\ f_a(x) \in [0,\ 1].$$

0,25 pt
d) En utilisant le résultat de la question **c)**, montrer que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$\forall x \in [0,1], \ |f_a(x) - x| \leq |a|.$$

Calculer alors $\lim\limits_{a\to 0}\Big|F(a) - F(0)\Big|$ puis $\lim\limits_{a\to 0}F(a)$.
La fonction F est-elle continue au point 0 ? **0,25 × 3=0,75 pt**

Partie B: (4 pts)

On note Ω_a le point de coordonnées $\left(1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$$

1. a) Montrer que $\mathcal{R}_a = (\Omega_a, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan. **0,25 pt**

b) Soit M un point du plan de couple de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. Appelons (X, Y) son couple de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_a$. En utilisant la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega_a} + \overrightarrow{\Omega_a M}$, montrer que :

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases}$$

0,5 pt

c) Vérifier que la courbe (C_a) a pour équation $Y^2 - X^2 = \dfrac{2(a-1)}{a^2}$ dans le repère $\mathcal{R}_a$.
0,5 pt

d) Déterminer la nature de C_a; préciser ses sommets S_a et $S_a{}'$ suivant les valeurs de a.
0,25+0,5=0,75 pt

2. Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 1$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Montrer que (C_a) a ses sommets sur (D) si et seulement si $a < 1$. **0,5 pt**

3. On suppose que $a > 1$.
a) Calculer en fonction de a les distances $\Omega_a S_a$ et $\Omega_2\Omega_a$.
Pour calculer $\Omega_a S_a$, on peut se placer dans le repère $\mathcal{R}_a$.
Pour calculer $\Omega_2\Omega_a$, on peut se placer dans le repère $\mathcal{R}$. **0,25 +0,25 =0,5 pt**
b) En appliquant le théorème de pythagore au triangle $\Omega_2\Omega_a S_a$, calculer $\Omega_2 S_a$; **0,5 pt**
c) En déduire que les sommets de C_a sont sur un cercle de centre Ω_2 dont on précisera le rayon. **0,5 pt**

Partie C: (2,5 pts)

Dans cette partie, a est un élément de l'intervalle $]0, 1[$.

Soit u_0 un élément de $[0; 1]$ et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1. a) Montrer que la fonction f_a est strictement croissante dans $[0, 1]$.
Quel est l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par f_a ? **0,25 +0,25=0,5 pt**
b) Montrer que la suite (u_n) est partout définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in [0, 1]$.
Que peut-on dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$? Si $u_0 = 1$? **0,5+0,25+0,25=1 pt**

2. On suppose que u_0 est différent de 0 et 1.
a) Vérifier que la suite (u_n) est strictement monotone. **0,5 pt**
b) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite. **0,25 +0,25=0,5 pt**

1. CORRECTION

Proposée par les auteurs [1]

EXERCICE 1. Pour chaque jour n, posons $\Omega_n = J_n \cup K_n$.
Cette réunion disjointe car les deux événements J_n et K_n sont contraires

Les données du problème se traduisent par : $p_1 = p(J_1) = \dfrac{2}{5}$ et pour tout jour n de l'année différent du premier jour :

$$p\Big(J_n/J_{n-1}\Big) = \frac{1}{3} \text{ et } p\Big(K_n/K_{n-1}\Big) = \frac{1}{3}.$$

1. ✉ $p\Big(J_2/J_1\Big) = \dfrac{1}{3}$

$p\Big(J_2/K_1\Big) = 1 - p\Big(K_2/K_1\Big) \Rightarrow p\Big(J_2/K_1\Big) = \dfrac{2}{3}.$

✉ Pour trouver la troisième valeur, écrivons :

$$J_2 = J_2 \cap \Omega_1 = J_2 \cap (J_1 \cup K_1) = (J_2 \cap J_1) \cup (J_2 \cap K_1).$$

$$\text{Alors } p(J_2) = p\Big[(J_2 \cap J_1) \cup (J_1 \cap K_1)\Big] = p(J_2 \cap J_1) + p(J_1 \cap K_1)$$

$$p(J_2) = p\Big(J_2/J_1\Big)p(J_1) + p\Big(J_2/K_1\Big)p(K_1)$$

Et comme $p(K_1) = 1 - p(J_1) = \dfrac{3}{5}$:

$$p(J_2) = p\Big(J_2/J_1\Big)p(J_1) + p\Big(J_2/K_1\Big)\Big(1 - p(J_1)\Big)$$

$$p(J_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\frac{3}{5} \Rightarrow p(J_2) = \frac{8}{15}$$

Puisque J_1 et K_1 sont contraires, $p(K_1) = 1 - p(J_1) = \dfrac{3}{5}$

Par conséquent $p(J_2) = \dfrac{1}{3}\dfrac{2}{5}p + \Big(J_2/J_1\Big)p(J_1) + p\Big(J_2/K_1\Big)p(K_1)$

2. Comme dans la question précédente, écrivons :

$$J_n = J_n \cap \Omega_{n-1} = J_n \cap (J_{n-1} \cup K_{n-1}) = (J_n \cap J_{n-1}) \cup (J_n \cap K_{n-1}).$$

$$\text{Alors } p(J_n) = p\Big[(J_n \cap J_{n-1}) \cup (J_{n-1} \cap K_{n-1})\Big] = p(J_n \cap J_{n-1}) + p(J_{n-1} \cap K_{n-1})$$

$$p(J_n) = p\Big(J_n/J_{n-1}\Big)p(J_{n-1}) + p\Big(J_n/K_{n-1}\Big)p(K_{n-1})$$

Et comme $p(K_{n-1}) = 1 - p(J_{n-1})$ et $p\Big(J_n/K_{n-1}\Big) = 1 - p\Big(K_n/K_{n-1}\Big)$

$$p(J_n) = p\Big(J_n/J_{n-1}\Big)p(J_{n-1}) + \Big[1 - p\Big(K_n/K_{n-1}\Big)\Big]\Big(1 - p(J_{n-1})\Big)$$

$$p(J_n) = \Big[p\Big(J_n/J_{n-1}\Big) + p\Big(K_n/K_{n-1}\Big) - 1\Big]p(J_{n-1}) + 1 - p\Big(K_n/K_{n-1}\Big)$$

$$p(J_n) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1)p(J_{n-1}) + 1 - \frac{1}{3}$$

$$p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$$

1. Pour télécharger d'autres sujets

3. a) ✉ $u_n = p_n - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}p_{n-1} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}\Big(u_{n-1} - \dfrac{1}{2}\Big) + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}u_{n-1}$

(u_n) est donc la suite géométrique de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{10}$ et de raison $-\dfrac{1}{3}$

b) ✉ $u_n = \Big(-\dfrac{1}{3}\Big)^{n-1} u_1 \Rightarrow u_n = -\dfrac{1}{10}\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)^{n-1}.$

✉ $p_n = u_n + \dfrac{1}{2} \Rightarrow p_n = -\dfrac{1}{10}\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)^{n-1} + \dfrac{1}{2}.$

4. La probabilité que cet élève a de manger du riz est $m_n = p_{2n} = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{3^{2n-1}} + \dfrac{1}{2}.$

$m_{n+1} - m_n = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{3^{2n+1}} - \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{3^{2n-1}} = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{3^{2n-1}}\Big(\dfrac{1}{3^2} - 1\Big) = -\dfrac{4}{5}\dfrac{1}{3^{2n+1}}$. Cette quantité étant négative, la suite (m_n) est décroissante. De plus $m_n \geq \dfrac{1}{2}$ (D'ailleurs la limite de la suite (m_n) est $\dfrac{1}{2}$.)

Par conséquent $\dfrac{1}{2} \leq m_n \leq m_0 = p_2$ c'est à dire $\dfrac{1}{2} \leq p_{2n} \leq \dfrac{8}{15}$

EXERCICE 2.

1. Chacun des entiers qui interviennent dans l'écriture d'un nombre en base a doit être strictement inférieur à a. Comme l'entier 3 intervient dans l'écriture de C, on a $a > 3$.

2. a) ✉ Les données du problème se traduisent par

$$\begin{aligned} A &= 2 \times a^2 + 1 \times a^1 + 1 \times a^0 \\ B &= 3 \times a^2 + 1 \times a^1 + 2 \times a^0 \\ C &= 1 \times a^5 + 3 \times a^4 + 3 \times a^3 + 0 \times a^2 + 3 \times a + 2 \times a^0 \end{aligned} \qquad (1.1)$$

La relation $C = AB$ signifie alors :

$$6a^4 + 5a^3 + 8a^2 + 3a + 2 = a^5 + 3a^4 + 3a^3 + 3a + 2$$
$$\text{soit } a^5 - 3a^4 - 2a^3 - 8a^2 = 0$$
$$\text{ou } a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$$

b) ✉ La relation $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$ se traduit par $a(a^2 - 3a - 2) = 8$; ce qui entraîne que a divise 8, l'autre facteur étant $T(a) = a^2 - 3a - 2$.

c) ✉ a étant un diviseur de 8 strictement supérieur à 3 vaut nécessairement 4 ou 8.
Si a était égal à 8, le facteur $T(a)$ serait égal à 38 et non à 1.
On vérifie ensuite que pour $a = 4$ on a bien $a(a^2 - 3a - 2) = 8$.

3. Faisons les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} 214 & 4 & & & \\ 14 & 53 & 4 & & \\ 2 & 13 & 13 & 4 & \\ & 1 & 1 & 3 & 4 \\ & & & 3 & 0 \end{array}$$

Le nombre qui s'écrit 214 dans la base 10 à pour écriture 3112 dans la base 4.

Vérification !! On a bien : $3 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 214$

4. a) ✉ Puisque $a = 4$, les relations **??** deviennent :

$$\begin{aligned} A &= 2\times 4^2+1\times 4^1+1=37\\ B &= 3\times 4^2+1\times 4^1+2=54\\ C &= 1\times 4^5+3\times 4^4+3\times 4^3+3\times 4+2=1998 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } A=37,\ B=54,\ C=1998$$

b) ✉ On a $A=37$ est premier, $B=54=2.3^3$.
Donc ppcm $(A,B)=37.2.3^3=A.B=C$.
On en déduit aussi pgcd $(A,B)=1$.
La propriété pgcd $(A,B)=1$ garantit l'existence des solutions de l'équation $Ax+By=1$.

5. a) ✉ $A.19+B.(-13)=1$ donc le couple $(x_0,y_0)=(19,-13)$ est bien solution de l'équation $Ax+By=1$.
b) ✉ La solution générale de l'équation est $(x,y)=(x_0+kB,y_0-kA),\ k\in\mathbb{Z}$

$$S=\big\{(19+54k,-13-37k),\ k\in\mathbb{Z}\big\}$$

PROBLEME.

Partie A:

1. a) ✉ notons s l'application de (P) dans (P) définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= -y\\ y' &= -x \end{cases}$$

et t l'application de (P) dans (P) définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= x+1\\ y' &= y+1 \end{cases}$$

s est la symétrie orthogonale d'axe la deuxième bissectrice,
t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(1,1)$ et $\varphi=t\circ s$

(Attention!! φ n'est pas égal à $s\circ t$.)
b) ✉ Soit $M(x,y)$ un point de (C_a) (c'est à dire tel que $x\in D_{f_a}$ et $y=f_a(x)$) et $M'(x',y')$ son image par φ. Il faut montrer que $y'=f_a(x')$.
$x'=-y+1$ appartient à D_{f_a}.
En effet $a(-y+1)-a+1$ est égal à $(a-1)\dfrac{ax-a+1}{ax-a+1}=a-1$, il ne peut donc être nul puisque $a\neq 1$. De plus

$$f_a(x')=f_a(-y+1)=\frac{-y+1}{a(-y+1)-a+1}=\frac{-y+1}{-ay+1}$$

$$=\frac{-\dfrac{x}{ax-a+1}+1}{-a\dfrac{x}{ax-a+1}+1}=\frac{(-x+1)(-a+1)}{-a+1}=-x+1=y'$$

2. a) ✉ Cherchons un point $A(x_0,y_0)$ tel que pour toute valeur du paramètre a, A appartient à C_a c'est à dire $x_0\in D_{f_a}$ et $y_0=f_a(x_0)$.
On doit avoir :

$$\forall a\in\mathbb{R}^*\setminus\big\{1\big\},\ y_0=\frac{x_0}{ax_0-a+1}$$

$$\text{Soit } \forall a\in\mathbb{R}^*\setminus\big\{1\big\},\ (x_0y_0-y_0)a+y_0-x_0=0$$

Pour cela, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} y_0 - x_0 & = & 0 \\ x_0 y_0 - y_0 & = & 0 \end{cases} \text{ c'est à dire } \begin{cases} y_0 & = & x_0 \\ x_0^2 - x_0 & = & 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_0 & = & x_0 \\ x_0 & = & 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

En résumé :

Les courbes C_a passent toutes par les points $O(0,0)$ et $A_1(1,1)$

b) ✉ Cherchons un point ℓ (dépendant éventuellement de a) fixé par f_a, c'est à dire tel que $\ell \in D_{f_a}$ et $f_a(\ell) = \ell$.

On doit avoir : $\dfrac{\ell}{a\ell - a + 1} = \ell$ c'est à dire $a(\ell^2 - \ell) = 0$. Donc $\ell = 0$ ou 1 puisque a est non nul.

Les points fixes de f_a sont 0 et 1

3. a) ✉ $f_a(x)$ est une fraction rationnelle, D_{f_a} est l'ensemble des réels qui n'annulent pas son dénominateur :

$$D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a-1}{a}\}$$

✉ La fonction f_a est définie et continue dans D_{f_a} et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to +\infty} f_a(x) = \frac{1}{a}$

Lorsque x tend vers $x_0 = \dfrac{a-1}{a}$, le dénominateur de $f_a(x)$ tend vers 0 et son numérateur vers le réel non nul x_0.

Pour calculer $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f_a(x)$, il faut connaître le signe de $f_a(x)$ quand x tend vers x_0.

Le signe de $f_a(x)$ est celui du trinôme $T(x) = x(ax - a + 1)$ dont les racines sont 0 et x_0. Ce trinôme a le signe de a à "l'extérieur des racines" et le signe de $-a$ à "l'intérieur des racines"

Le réel x_0 a même signe que le trinôme $(a-1)a$; donc il est < 0 si a appartient à $]0, 1[$ et > 0 sinon ; ce qui motive la discussion suivante.

☺ Si a est > 1, alors x_0 est > 0 et $T(x)$ a le signe de a (c'est à dire est > 0) dans $]x_0, +\infty[$ et le signe de $-a$ dans $]0, x_0[$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} f_a(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} f_a(x) = -\infty$

☺ Si $a \in]0, 1[$, alors x_0 est < 0 et $T(x)$ a le signe de a (c'est à dire est > 0) dans $]-\infty, x_0[$ et le signe de $-a$ dans $]x_0, 0[$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} f_a(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} f_a(x) = +\infty$

☺ Si a est < 1, alors x_0 est > 0 et $T(x)$ a le signe de a (c'est à dire est < 0) dans $]x_0, +\infty[$ et le signe de $-a$ dans $]0, x_0[$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} f_a(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} f_a(x) = +\infty$.

En résumé :

$$\lim_{x \to x_0^+} f_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

✉ La fonction f_a est dérivable dans D_{f_a} et

$$\forall x \in D_{f_a},\ f_a'(x) = \frac{-a+1}{(ax-a+1)^2}$$

La dérivée a donc le signe de $1 - a$. Plus précisément :

✌ Si $1-a>0$ c'est à dire $a<1$, alors $\forall x \in D_{f_a},\ f_a'(x)>0$.
✌ Si $1-a<0$ c'est à dire $a>1$, alors $\forall x \in D_{f_a},\ f_a'(x)<0$.
Voici les tableaux de variation de f_a selon a.

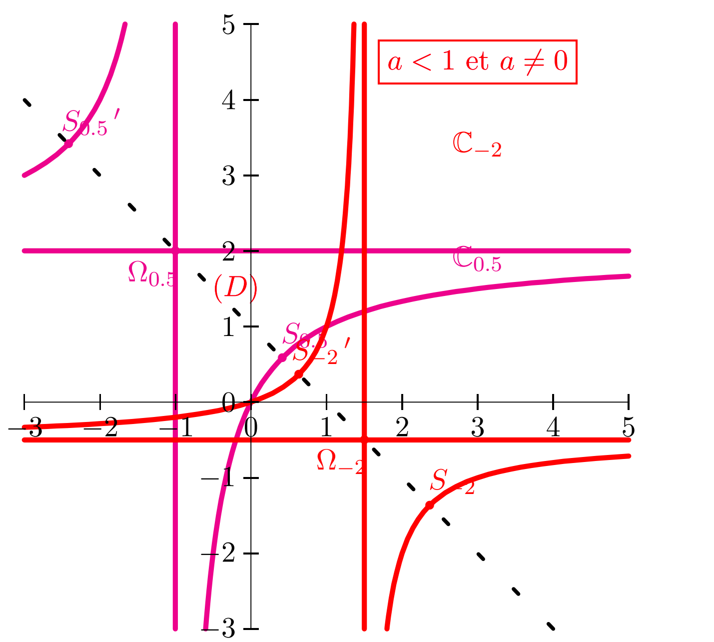
T.V de $x \to \dfrac{x}{ax-a+1}$, $a<1$ et $a\neq 0$

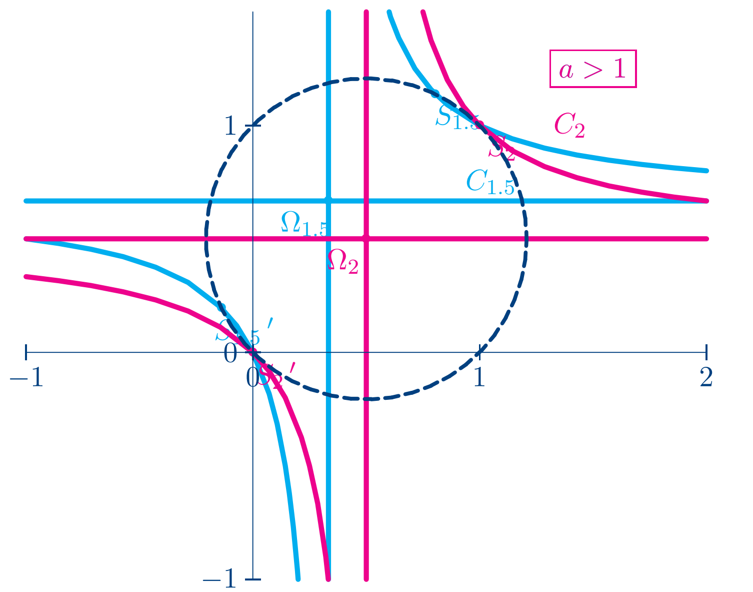
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f	$\frac{1}{a}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{a}$

T.V de $x \to \dfrac{x}{ax-a+1}$, $a>1$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f	$\frac{1}{a}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{a}$

Et voici les courbes demandées





4. a) ✉ La fonction φ est strictement monotone par ce que sa dérivée est le réel non nul a. Par conséquent, pour tout x appartenant à $[0,1]$, $\varphi(x)$ est compris entre $\varphi(0) = 1 - a$ et $\varphi(1) = 1$, réels strictement positifs. φ est donc strictement positif dans $[0,1]$ en particulier φ est non nul dans $[0,1]$.

Ainsi la fonction $x \to f_a(x)$ qu'il faut intégrer est définie et continue dans $[0,1]$; de ce fait l'intégrale $F(a)$ est bien définie si a est non nul.

$F(0)$ est défini par l'énoncé et $F(0) = \displaystyle\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$

b) Le changement de variable $t = ax + 1 - a$ donne

$$F(a) = \frac{1}{a^2}\int_{1-a}^{1}\left(1 + \frac{a-1}{t}\, dt\right) = \frac{1}{a^2}\Big[t + (a-1)\ln t\Big]_{t=1-a}^{t=1}$$

$$\boxed{F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1-a}{a^2}\ln(1-a)}$$

Lorsque a tend vers 1^-, $h = 1 - a$ tend vers 0^+ et $F(a) = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} h \ln h$ tend vers 1 car $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} h \ln h = 0$.

$$\boxed{\lim_{a \to 1^-} F(a) = 1}$$

Lorsque a tend vers $-\infty$, $h = 1 - a$ tend vers $+\infty$ et $F(a) = \dfrac{1}{h+1} + \dfrac{h^2}{(h+1)^2}\dfrac{\ln h}{h}$ tend vers 0 car $\displaystyle\lim_{h \to +\infty} \frac{h^2}{(h+1)^2} = 1$ et $\displaystyle\lim_{h \to +\infty} \frac{\ln h}{h} = 0$.

$$\boxed{\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0}$$

c) ☞ Si $a < 0$, alors $[0,1]$ est inclus dans $\left]-\infty, 1 - \dfrac{1}{a}\right[$, intervalle dans lequel la fonction f_a est continue et strictement croissante.

Donc si $a < 0$, alors $\forall x \in [0,1],\ f_a(x) \in [f_a(0), f_a(1)] = [0,1]$.

☞ Si $0 < a < 1$, alors $[0,1]$ est inclus dans $\left]1-\frac{1}{a}, +\infty\right[$, intervalle dans lequel la fonction f_a est continue et strictement croissante.

Donc si $0 < a < 1$, alors $\forall x \in [0,1],\ f_a(x) \in [f_a(0), f_a(1)] = [0,1]$.

d) On a pour tout $x \in [0,1]$:

$$|f_a(x) - x| = \left|\frac{-ax^2+ax}{ax-a+1}\right| = |a|\frac{-x^2+x}{ax-a+1} \le |a|\frac{x}{ax-a+1} = |a|f_a(x) \le |a|$$

e) Maintenant on peut écrire :

$$0 \le |F(a) - F(0)| = \left|\int_0^1 \Big(f_a(x) - x\Big)\,dx\right| \le \int_0^1 \Big|f_a(x) - x\Big|\,dx \le \int_0^1 |a|\,dx = |a|$$

et le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{a\to 0}\Big|F(a) - F(0)\Big| = 0$$

Autrement dit

$$\lim_{a\to 0} F(a) = F(0) = \frac{1}{2}$$ [2]

Par conséquent F est continue en 0.

Partie B:

1. a) ✉ Pour prouver que $\mathcal{R}_a$ est un r.o.n, il suffit de vérifier que $\|\overrightarrow{e_1}\|^2 = \overrightarrow{e_2}\|^2 = 1$ et $\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2} = 0$.

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{e_1}\|^2 &= \frac{1}{2}\Big(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\Big)^2 = \frac{1}{2}\Big(\overrightarrow{i}^2 - 2\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{j}^2\Big) = 1\\
\|\overrightarrow{e_2}\|^2 &= \frac{1}{2}\Big(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\Big)^2 = \frac{1}{2}\Big(\overrightarrow{i}^2 + 2\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{j}^2\Big) = 1\\
\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} &= \frac{1}{2}\Big(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\Big).\Big(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\overrightarrow{i}^2 - \overrightarrow{j}^2\Big) = 0
\end{aligned}$$

.

b) ✉ Soit M un point de coordonnées $(x,\,y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et de coordonnées $(X,\,Y)$ dans le repère $\mathcal{R}_a$.

De la relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega_a} + \overrightarrow{\Omega_a M}$ on tire :

$$\begin{aligned}
x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} &= \Big(1 - \frac{1}{a}\Big)\overrightarrow{i} + \frac{1}{a}\overrightarrow{j} + X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}\\
x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} &= \Big(1 - \frac{1}{a}\Big)\overrightarrow{i} + \frac{1}{a}\overrightarrow{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}X\Big(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\Big) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\Big(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\Big)\\
x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} &= \left[1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\right]\overrightarrow{i} + \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)\right]\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\\ y &=& \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)\end{array}\right. \tag{1.2}$$

2. Par un développement limité de $a \to \ln(1-a)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 on peut trouver la $\lim\limits_{a\to 0} F(a)$ en prenant l'expression $F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1-a}{a^2}\ln(1-a)$. On trouve $F(a) = \frac{1}{2} + o(1) \overset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
Ou dire après l'avoir légitimé : $\lim\limits_{a\mapsto 0} F(a) = \int_0^1 \lim\limits_{a\mapsto 0} f_a(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

c) ✉ Soit M un point de coordonnées $(x,\, y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et de coordonnées $(X,\, Y)$ dans le repère $\mathcal{R}_a$.

$$\begin{aligned} M \in C_a &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) = \frac{1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)}{a\Big(1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\Big) + 1 - a} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) = \frac{1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)}{\dfrac{a}{\sqrt{2}}(X+Y)} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{2}(Y^2 - X^2) = 1 - \frac{1}{a} \\ &\Leftrightarrow Y^2 - X^2 = \frac{2(a-1)}{a^2} \end{aligned}$$

La courbe C_a a donc pour équation dans le repère $\mathcal{R}_a$:

$$Y^2 - X^2 = \frac{2(a-1)}{a^2} \tag{1.3}$$

d) ✉ Puisque le paramètre a est différent de 1, le réel $a-1$ est non nul ; nous reconnaissons donc l'équation réduite d'une hyperbole.

Plus précisément :

☞ Si $a-1$ est >0 c'est à dire si $a>1$, alors

$$M \in C_a \Leftrightarrow Y^2 - X^2 = \left(\frac{\sqrt{2(a-1)}}{|a|}\right)^2$$

☞ Si $a-1$ est <0 c'est à dire si $a<1$ (et $a \neq 0$), alors

$$M \in C_a \Leftrightarrow Y^2 - X^2 = -\left(\frac{\sqrt{2(1-a)}}{|a|}\right)^2$$

En résumé en posant $\alpha = \dfrac{\sqrt{2|a-1|}}{|a|}$:

(1.4)

$$\left\{\begin{array}{l} ☞\ \text{Si } a>1, \text{ alors } M \in C_a \Leftrightarrow \dfrac{Y^2}{\alpha^2} - \dfrac{X^2}{\alpha^2} = 1 \\ \text{Les sommets } S_a \text{ et } S_a{}' \text{ ont pour coordonnées respectives } (0,\, \alpha) \text{ et } (0,\, -\alpha) \text{ dans le repère } \mathcal{R}_a \\ ☞\ \text{Si } a<1, \text{ alors } M \in C_a \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{\alpha^2} - \dfrac{Y^2}{\alpha^2} = 1 \\ \text{Les sommets } S_a \text{ et } S_a{}' \text{ ont pour coordonnées respectives } (\alpha,\, 0) \text{ et } (-\alpha,\, 0) \text{ dans le repère } \mathcal{R}_a \end{array}\right.$$

2. ✉ Les axes de l'hyperbole C_a sont les axes de coordonnées du repère $\mathcal{R}_a$.

Elles ont pour équations respectives dans le repère $\mathcal{R}_a$: $X = 0$ (axe des ordonnées) et $Y = 0$ (axe des abscisses).

On obtient à partir des relations **??**, en faisant la somme puis la différence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{2}{\sqrt{2}}Y + 1 & = & x + y \\ \dfrac{2}{\sqrt{2}}X + 1 + \dfrac{2}{a} & = & x - y \end{array}\right.$$

$$(1.5)\qquad \begin{cases} Y &= \sqrt{2}(x+y-1) \\ X &= \sqrt{2}(x-y-1-\dfrac{2}{a}) \end{cases}$$

Donc dans le repère $\mathcal{R}$ l'axe des ordonnées de $\mathcal{R}_a$ a pour équation : $x-y-1-\dfrac{2}{a}=0$ et l'axe des abscisses de $\mathcal{R}_a$ a pour équation : $x+y-1=0$.
L'axe des abscisses du repère $\mathcal{R}_a$ est donc la droite (D)
Pour que les sommets soient sur la droite (D) il faut et il suffit que cette droite soit l'axe focal c'est à dire que l'équation réduite de C_a soit de la forme "$\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$".
On en déduit en utilisant **??** que pour que les sommets soient sur (D) il faut et il suffit que a soit <1.

3. Pour calculer $\Omega_a S_a$ plaçons-nous dans le repère $\mathcal{R}_a$.
Dans ce repère, les coordonnées de Ω_a sont $(0,0)$ et ceux des sommets S_a et $S_a\,'$ sont les couples $(0,\,\alpha)$ et $(0,\,-\alpha)$; donc $\overrightarrow{\Omega_a S_a}$ a pour coordonnées $(\alpha,\,0)$ et $\Omega_a S_a=\alpha$:

$$\Omega_a S_a=\Omega_a S_a\,'=\frac{\sqrt{2|a-1|}}{a}$$

Pour calculer $\Omega_2\Omega_a$ plaçons-nous dans le repère $\mathcal{R}$.
Dans ce repère, les coordonnées de Ω_a sont $\left(1-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$ et ceux de Ω_2 sont le couple $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$; donc $\overrightarrow{\Omega_2\Omega_a}$ a pour coordonnées $(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2})$ et $\Omega_2\Omega_a=\sqrt{2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{(a-2)^2}{2a^2}}\Rightarrow$

$$\Omega_2\Omega_a=\sqrt{2}\,\frac{|a-2|}{2a}$$

Les points Ω_2 et Ω_a étant les centres des hyperboles C_2 et C_a sont sur les axes des ces hyperboles en particulier ils sont tous les deux sur l'axe (D).
Les points S_a et Ω_a étant respectivement un sommet et le centres de l'hyperbole C_a sont sur l'axe focal de C_a.
Comme les axes de C_a sont perpendiculaires en Ω_a, le triangle $\Omega_2\Omega_a S_a$ est rectangle en Ω_a. On en déduit en appliquant le théorème de pythagore que :

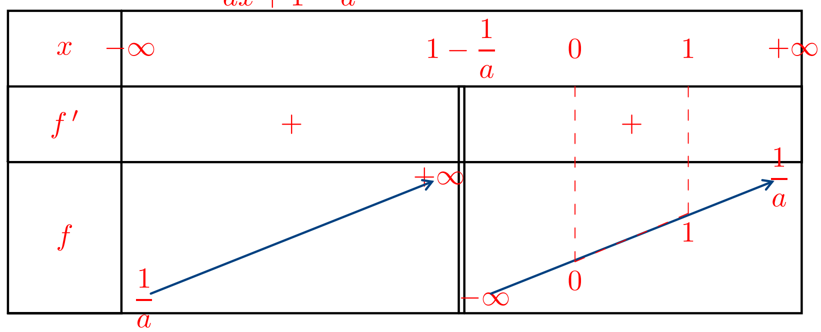
$$\Omega_2 S_a\,^2=\Omega_2\Omega_a\,^2+\Omega_a S_a\,^2=\frac{(a-2)^2}{2a^2}+\frac{2(a-1)}{a^2}\Rightarrow$$

$$\Omega_2 S_a\,^2=\Omega_2 S_a\,'^{\,2}=\frac{1}{2}$$

Par conséquent $\forall a>1,\ S_a$ et $S_a\,'$ appartiennent au cercle de centre Ω_2 et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) Déjà fait, voici le tableau de variation de f_a.

T.V de $x \to \dfrac{x}{ax+1-a}$, $0<a<1$



D'après le tableau de variation, l'image de l'intervalle $[0,1]$ est lui-même.

b) Raisonnons par récurrence pour montrer la propriété :

P_n : "u_n est défini et u_n appartient à $[0,1]$ "

Initialisation : "u_0 est défini et u_0 appartient à $[0,1]$ " (données de l'énoncé). P_0 est donc vrai.

Héritage : Supposons la propriété vérifiée jusqu'à un rang n donnée ; en particulier que P_n soit vraie, c'est à dire "u_n est défini et u_n appartient à $[0,1]$ ".

Alors puisque $f_a([0,1]) = [0,1]$, $u_{n+1} = f_a(u_n)$ appartient à $[0,1]$. La propriété P_{n+1} est vérifiée.

Les points fixes de f_a étant 0 et 1 :

✉ Si $u_0 = 0$, alors pour tout entier n, $u_n = 0$; la suite (u_n) est constante.

✉ Si $u_0 = 1$, alors pour tout entier n, $u_n = 1$; la suite (u_n) est constante.

5. a) ✉ Si u_0 est différent de 0 et 1, il en est de même de u_n pour tout n ; et alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_a(u_n) \in]0,1[.$$

Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = f_a(u_n) - u_n = a.\ \frac{u_n^2 - u_n}{au_n - a + 1} = a(u_n - 1)f_a(u_n)$$

$u_{n+1} - u_n$ est donc strictement négatif parce que $u_n - 1 < 0$ et $f_a(u_n) > 0$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

b) ✉ La suite (u_n) étant bornée par 0 et 1 et monotone, converge vers un réel ℓ appartenant à $[0,1]$.

A partir de la relation $0 < u_{n+1} = f_a(u_n) < u_0 < 1$ on obtient par passage la limite :

$$0 \leq \ell = f_a(\ell) \leq u_0 < 1$$

ℓ est donc un point fixe de f_a différent de 1 : $\ell = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0