

Concours Général 99: Epreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée: 6 heures

Le problème est composé de deux parties ayant chacune son objectif spécifique.

La partie 1 vise à étudier les racines primitives d'ordre n de l'unité pour construire quelques polynômes cyclotomiques permettant de déboucher sur une conjecture.

La partie 2 utilise quelques propriétés des racines n -ièmes de l'unité pour calculer l'intégrale $I(a)$.

$$I(a) = \int_0^2 \ln(1 - 2a \cos(x) + a^2) dx \text{ où } a \text{ est un paramètre réel tel que } |a| \neq 1.$$

ENONCE DU PROBLEME

Partie 1

A

Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2.

1)

a) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation d'inconnue Z

$$(e) : Z^n = 1$$

Chacune des n solutions trouvées est appelée une racine n ème de l'unité. Notons les Z_p , $0 \leq p \leq n - 1$.

b) On pose $w_n = \exp \frac{2i\pi}{n}$. Exprimer en fonction de w_n les solutions de l'équation (e).

2. Montrer que $Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n-1} = Z_1(Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n-1})$.

En déduire que : $Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n-1} = 0$.

3. Montrer que l'on a : $\prod_{p=0}^{n-1} Z - p = \pm 1$, plus précisément montrer que $Z_0 \times Z_1 \times \dots \times Z_{n-1} = (-1)^{n-1}$ (discuter suivant la parité de n).

4. On désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les n racines d'un polynôme P de \mathbb{C} de degré n tel que : $P(Z) = b_n Z^n + b_{n-1} Z^{n-1} + b_1 Z + b_0$ avec $b_n \neq 0$.

a) Montrer que l'on a : $\prod_{p=1}^n \alpha_p = (-1)^n \frac{b_0}{b_n}$

b) Montrer que l'on a : $\sum_{p=1}^n \alpha_p = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{b_{n-1}}{b_n}$

5. En utilisant les résultats de la question 4) retrouver les solutions des questions 2) et 3).

6. Calculer la somme $S_n = \sum_{p=1}^n \cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$.

C

On considère $w_n = \exp \frac{2i\pi}{n}, n \geq 2$.

1. Soit p un entier relatif. Calculer $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp}$ (Distinguer selon que p est multiple de n ou pas).

2. Soient p et q deux entiers relatifs. Calculer : $T_n(p, q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} w_n^{kq}$, et $V_n(p, q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} w_n^{-kq}$.

D

1. Factoriser le polynôme $Z^n - 1$. En choisissant la valeur de Z , montrer que l'on en déduit la formule : (1) $\prod_{p=0}^{n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{n}\right) = n \times 2^{1-n}$.

2. Simplifier cette formule suivant que n est pair ou impair. En déduire la valeur des produits : $P_1 = \prod_{p=1}^{n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$ et $P_2 = \prod_{p=1}^{n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n} \times 2^{1-2n} = 2^{1-n} \sqrt{n}$.

E

Deux entiers sont dits premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1 . Soit $Z_p = \cos \frac{2p\pi}{n} + i \sin \frac{2p\pi}{n} (0 \leq p \leq n-1)$. On dit que Z_p est une racine primitive d'ordre n de l'unité si les entiers p et n sont premiers entre eux. On appelle polynôme cyclotomique d'indice n le polynôme : $\Phi_n(Z) = (Z - Z'_1)(Z - Z'_2) \cdots (Z - Z'_p) \cdots (Z - Z'_{n_0-1})$ où les Z'_p sont, toutes, les racines primitives d'ordre n de l'unité.

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que Z_p soit une racine primitive d'ordre n de l'unité est que, quel que soit l'entier $m < n$, Z_p est racine m -ième de l'unité.

2. Que peut on dire du degré du polynôme cyclotomique d'indice n ?

3. Pour tout n premier, écrire effectivement le polynôme cyclotomique d'indice n .

4. Montrer que, pour tout n premier, on a : $\Phi_{2n}(Z) = \Phi_n(-Z)$.

Application

1. Déterminer $\Phi_5(Z)$ et en déduire $\Phi_{10}(Z)$.
2. Ecrire l'ensemble des diviseurs (positifs) du naturel 12. Pour chacun des diviseurs d de 12 (y compris $d = 1$ et $d = 12$), déterminer les polynômes cyclotomiques $\Phi_d(Z)$.
3. Effectuer alors le produit de ces polynômes. Pouvait on prévoir ce résultat? En considérant les polynômes cyclotomiques ci-dessus quelle conjecture peut-on faire?

Partie 2

A

Soit a un réel tel que $|a| \neq 1$. Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(1 - 2a \cos(x) + a^2) \end{aligned}$$

Le but de cet exercice est de calculer $I(a) = \int_0^{2\pi} f(x)dx$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $Z^{2n} = 1$. En déduire une factorisation de $Z^{2n} - 1$.
2.
 - a) Déterminer la valeur (réelle) de $\prod_{k=1}^n (a - \exp \frac{i2k\pi}{2n})(a - \exp -\frac{i2k\pi}{2n})$
 - b) En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^n (1 - 2a \cos \frac{k\pi}{n} + a^2)$.
3. On considère l'intégrale $J(a) = \int_0^\pi f(x)dx$.
Déterminer une somme de $J_n(a)$ donnant une valeur approchée de l'intégrale $J(a)$ par la méthode des rectangles(on partagera $[0, \pi]$ en n intervalles de même longueur).

B

1. Soit $U_n(a)$ la suite de terme général $\frac{(a^{2n}-1)(a+1)}{a-1}$.
 - a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(a)$, si $|a| < 1$.
 - b. Lorsque $|a| > 1$, étudier la suite de terme général $h_n = \frac{a-1}{a^{2n+1}} U_n(a)$ et en déduire la convergence et le signe de h_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\pi}{n} \ln \frac{(a^{2n}-1)(a+1)}{a-1} \right]$

2. En déduire $I(a)$ en fonction de a .

BAREME

	Partie 1		
Etape A	1. =0,5 point	Etape E	1. =0,75 point
	2. =0,75 point		2. =0,75 point
	3. =0,75 point		3. =0,5 point
	4. a) =0,75 point		4. =1,25 point
	b) =0,5 point	Etape F	1. =0,5 point
	5. =0,75 point		2. =1 point
	6. =0,5 point		3. =1 point
Etape B	1. a)=1 point	Partie 2	
	b)=0,5 point	Etape A	1. =0,25 point
2. =0,75 point	2. a)=0,75 point		
Etape C	1. =0,5 point		b)=0,75 point
	2. a)=0,75 point	3. =0,5 point	
	b)=0,75 point	Etape B	1.a)=0,25 point
Etape D	1. =0,75 point		-b)=0,75 point
	2. =1 point		2. =1 point