Olympiade 2000, Taejon, Corée du Sud

Problème 1

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en *M* et *N*. Soit *l* la tangente commune à Γ_1 et Γ_2 telle que *M* soit plus proche de *l* que *N*. La droite *l* est tangente à Γ_1 en *A* et à Γ_2 en *B*. La droite passant par *M* et parallèle à *l* rencontre à nouveau le cercle Γ_1 en *C* et le cercle Γ_2 en *D*. Les droites *CA* et *DB* se coupent en *E* ; les droites *AN* et *CD* se coupent en *P* ; les droites *BN* et *CD* se coupent en *Q*. Montrer que $EP = EQ$.

Problème 2

Soient *a*, *b*, *c* trois nombres réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1$.

Problème 3

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Au début, il y a *n* puces sur une droite horizontale, pas toutes au même point. Pour un nombre réel strictement positif λ, on définit un *mouvement* de la façon suivante :

- on choisit deux puces situées aux points *A* et *B*, avec *A* à gauche de *B* ;
- alors la puce en *A* saute au point *C*, situé sur la même droite, à droite de *B* et tel que $BC/AB = \lambda$.

Trouver toutes les valeurs de λ telles que, pour tout point *M* sur la droite et toutes positions initiales des *n* puces, il existe une suite finie de mouvements qui amène toutes les puces à droite de *M*.

Problème 4

Un magicien a cent cartes numérotées de 1 à 100. Il les répartit dans trois boîtes, une rouge, une blanche et une bleue, de telle sorte que chaque boîte contienne au moins une carte. Un spectateur choisit deux de ces trois boîtes, tire une carte dans chacune d'elles et annonce la somme des nombres figurant sur les cartes tirées. Connaissant cette somme, le magicien identifie la boîte dans laquelle aucune carte n'a été tirée. De combien de façons la magicien peut-il répartir les cartes dans les boîtes de telle sorte que ce tour de magie réussisse toujours ?

(Deux façons de répartir les cartes sont considérées comme différentes si au moins une carte est placée dans deux boîtes différentes).

Problème 5

Existe-t-il un entier strictement positif *n* tel que *n* soit divisible par exactement 2000 nombres premiers distincts et $2^n + 1$ soit divisible par *n* ?

Problème 6

Soient AH_1, BH_2, CH_3 les hauteurs d'un triangle *ABC* dont tous les angles sont aigus. Le cercle inscrit dans le triangle *ABC* est tangent respectivement aux côtés *BC*, *CA*, *AB* en T_1, T_2, T_3. On désigne respectivement par l_1, l_2, l_3 les symétriques des droites H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 par rapport aux droites T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2. Montrer que l_1, l_2, l_3 déterminent un triangle dont les sommets appartiennent au cercle inscrit dans le triangle *ABC*.

[Page principale Daaramath - A propos -]
[Cours - Sujets et Corrigés Bac et CGS Sénégal - Exercices et Problèmes]
[Histoire - News du jour - Un peu de divertissement - Contact]