Olympiade 2002, Glasgow, Grande-Bretagne

Problème 1

Soit *n* un entier strictement positif. Soit *T* l'ensemble des points (x, y) du plan pour lesquels *x* et *y* sont des entiers positifs ou nuls et $x + y < n$. Chaque point de *T* est colorié soit en rouge, soit en bleu. Si un point (x, y) est rouge, alors tous les points (x', y') de *T* avec $x' \leqslant x$ et $y' \leqslant y$ sont rouges. On appelle ensemble de type *X* un ensemble de *n* points bleus ayant des abscisses *x* toutes distinctes, et ensemble de type *Y* un ensemble de *n* points bleus ayant des ordonnées *y* toutes distinctes.
Montrer que le nombre d'ensembles de type *X* est égal au nombre d'ensembles de type *Y*.

Problème 2

Soit *BC* un diamètre du cercle Γ de centre *O*. Soit *A* un point de Γ tel que $0° < \widehat{AOB} < 120°$. Soit *D* le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas le point *C*. La droite passant par *O* parallèle à la droite *DA* rencontre la droite *AC* en *J*. La médiatrice du segment *OA* rencontre Γ en *E* et *F*. Montrer que *J* est le centre du cercle inscrit au triangle *CEF*.

Problème 3

Trouver tous les couples d'entiers (m, n) avec $m, n \geqslant 3$ tels qu'il existe une infinité d'entiers *a* strictement positifs tels que

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

soit entier.

Problème 4

Soit n un entier strictement plus grand que 1. On note $d_1, d_2, \ldots, d_k$ les diviseurs positifs de n avec

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$$

On pose $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k$.

- Montrer que : $D < n^2$
- Trouver tous les entiers n pour lesquels D est un diviseur de n^2.

Problème 5

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, vérifiant

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pour tous les x, y, z, t de $\mathbb{R}$.

Problème 6

Dans le plan, soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ des cercles de rayons 1 avec $n \geqslant 3$. On note respectivement par $O_1, O_2, \ldots, O_n$ leurs centres. On suppose qu'aucune droite ne rencontre plus de deux de ces cercles. Montrer que

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{O_iO_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Daara Math