

Olympiade 2003, Tokyo, Japon

Problème 1

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ ayant exactement **101** éléments. Montrer qu'il existe des nombres t_1, t_2, \dots, t_{100} dans S , tels que les ensembles :

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \text{ pour } j = 1, 2, \dots, 100$$

soient deux à deux disjoints.

Problème 2

Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que :

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

soit un entier strictement positif.

Problème 3

On se donne un hexagone convexe dans lequel deux côtés opposés quelconques ont la propriété suivante : la distance entre leurs milieux est $\sqrt{3}/2$ fois la somme de leurs longueurs. Montrer que tous les angles de cet hexagone sont égaux.

(Un hexagone convexe $ABCDEF$ a trois paires de côtés opposés : AB et DE , BC et EF , CD et FA .)

Problème 4

$ABCD$ est un quadrilatère convexe, inscriptible. Soient P , Q et R les pieds des perpendiculaires issues de D , respectivement, sur les côtés BC , CA et AB . Montrer que $PQ = QR$ si et seulement si les bissectrices des angles A et C se

coupent sur AC .

Problème 5

Soit n un entier strictement positif et x_1, x_2, \dots, x_n des nombres réels tels que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

- (a) Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$$

- (b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si x_1, x_2, \dots, x_n est une suite arithmétique.
-

Problème 6

Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe un nombre premier q tel que pour tout entier n , le nombre $n^p - p$ n'est pas divisible par q .

[[Page principale Daaramath](#) - [A propos](#) -]

[[Cours](#) - [Sujets et Corrigés Bac et CGS Sénégal](#) - [Exercices et Problèmes](#)]

[[Histoire](#) - [News du jour](#) - [Un peu de divertissement](#) - [Contact](#)]



The logo for Daara Math features the text "Daara Math" in a bold, sans-serif font. The word "Daara" is in red and "Math" is in black. The text is set against a light yellow rectangular background with a subtle drop shadow effect.

Copyright DaaraMath
2008-2010
contact (at) daaramath.com

Pour toute question concernant DaaraMath : contact (at) daaramath.com
Nous remercions l'équipe de Yann Olivier pour les ressources mises en ligne.