Olympiade 1996, Mumbai, Inde

Problème 1

ABCD est un tableau rectangulaire dans lequel $AB = 20$ et $BC = 12$. Ce tableau est subdivisé en 20x12 carrés unité. On se donne un entier strictement positif *r*.

Un jeton peut se déplacer d'un carré à un autre si et seulement si la distance des centres de ces deux carrés est exactement $\sqrt{r}$.

Le but est de trouver une suite de déplacements amenant le jeton du carré ayant pour sommet *A* au carré ayant pour sommet *B*.

- Montrer que ceci ne peut pas être réalisé si *r* est divisible par 2 ou par 3.
- Montrer que ceci peut jtre réalisé si $r = 73$.
- Ceci peut-il être réalisé si $r = 97$?

Problème 2

P est un point à l'intérieur du triangle *ABC* tel que

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$$

Soient *D* et *E* les centres des cercles inscruits respectivement dans les triangles *APB* et *APC*. Montrer que les droites *AP*, *BD* et *CE* sont concourantes.

Problème 3

Soit $S = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Trouver toutes les applications *f* de *S* dans *S* telles que :

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

pour tout *m* et *n* de *S*.

Problème 4

Les entiers strictement positifs *a* et *b* sont tels que les nombres $15a + 16b$ et $16a - 15b$ sont tous les deux des carrés d'entiers strictement positifs.

Trouver la plus petite valeur pouvant être prise par le minimum de ces deux carrés.

Problème 5

Soit *ABCDEF* un hexagone convexe tel que *AB* soit parallèle à *ED*, *BC* soit parallèle à *FE* et *CD* soit parallèle à *AF*.

Soient R_A, R_C et R_E les rayons des cercles circonscrits respectivement aux triangles *FAB*, *BCD* et *DEF* et soit *p* le périmètre de l'hexagone.

Montrer que $R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2}$.

Problème 6

Soient *n*, *p* et *q* des entiers strictement positifs tels que $n > p + q$.

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des entiers vérifiant les deux conditions suivantes :

- $x_0 = x_n = 0$
- pour chaque entier *i*, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a soit $x_i - x_{i-1} = p$, soit $x_i - x_{i-1} = -q$.

Montrer qu'il existe un couple d'indices (i, j) avec $i < j$ et $(i, j) \neq (0, n)$, tel que $x_i = x_j$.

Copyright DaaraMath
2008-2010
contact (at) daaramath.com

Pour toute question concernant DaaraMath : `contact (at) daaramath.com`
Nous remercions l'équipe de Yann Olivier pour les ressources mises en ligne.