Olympiade 1997, Mar del Plata, Argentine

Problème 1

Dans le plan, les points à coordonnées entières sont les sommets de carrés unités. Les carrés sont coloriés alternativement en blanc et en noir (comme sur un échiquier).

Pour tout couple d'entiers strictement positifs *m* et *n*, on considère un triangle rectangle dont les sommets sont des points à cordonnées entières et dont les côtés de l'angle droit, de longueur *m* et „ suivent les côtés des carrés.

Soit S_1 l'aire totale de la partie noire du triangle et S_2 l'aire totale de sa partie blanche. On pose :

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|$$

- Calculer $f(m,n)$ pout tous les entiers strictement positifs *m* et *n* qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs.
- Montrer que pour tout *m* et *n* : $f(m,n) \leqslant \frac{1}{2}\max(m,n)$.
- Montrer qu'il n'existe pas de constante *C* telle que, pour tout *m* et *n*, $f(m,n) < C$.

Problème 2

L'angle $\hat{A}$ est le plus petit dans le triangle *ABC*.

Les points *B* et *C* divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs. Soit *U* un point intérieur à l'arc limité par *B* et *C* qui ne contient pas *A*.

Les médiatrices des segments *AB* et *AC* rencontrent la droite *AU* respectivement en *V* et *W*. Les droites *BV* et *CW* se coupent au point *T*.

Montrer que $AU = TB + TC$.

Problème 3

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels vérifiant les conditions suivantes :

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

et

$$|x_i| \leqslant \frac{n+1}{2}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que :

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}$$

Problème 4

Une matrice carrée à *n* lignes et *n* colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, est appelée une matrice *d'argent* si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, la réunion de la *i*-ième ligne et de la *i*-ième colonne contient tous les éléments de *S*. Montrer que :

- il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$;
- il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de *n*.

Problème 5

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers $a \geqslant 1, b \geqslant 1$ vérifiant l'équation :

$$a^{(b^2)} = b^a$$

Problème 6

Pour tout entier strictement positif *n*, $f(n)$ désigne le nombre de façons de représenter *n* comme une somme de puissances de 2 à exposants entiers positifs ou nuls.

Deux représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple $f(4) = 4$ car le nombre 4 peut être représenté par les quatre façons suivantes : 4; 2+2; 2+1+1; 1+1+1+1.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$$

[Page principale Daaramath - A propos -]
[Cours - Sujets et Corrigés Bac et CGS Sénégal - Exercices et Problèmes]
[Histoire - News du jour - Un peu de divertissement - Contact]

Daara Math

Nous remercions l'équipe de Yann Olivier pour les ressources mises en ligne.