

Olympiade 1999

Bucarest, Roumanie

Problème 1

Dans le plan, déterminer tous les ensembles finis S , constitués d'au moins trois points, qui vérifient la propriété suivante :

pour tout couple de points distincts A et B de S , la médiatrice du segment AB est un axe de symétrie de S .

Problème 2

Soit n un entier fixé, supérieur ou égal à 2.

(a) Déterminer la plus petite constante C telle que, pour tout ensemble x_1, \dots, x_n de réels positifs ou nuls on ait l'inégalité :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

(b) Pour cette constante C , déterminer les cas d'égalité.

Problème 3

On considère un tableau carré de côté n , où n est un entier pair, strictement positif, fixé. Le tableau est divisé en n^2 carrés unité. On dit que deux carrés distincts du tableau sont *adjacents* si et seulement s'ils ont un côté en commun.

On marque N carrés unité de ce tableau de telle sorte que chaque carré unité de ce tableau (marqué ou non marqué) soit adjacent à au moins un carré marqué.

Déterminer la plus petite valeur possible de N .

Problème 4

Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers strictement positifs tels que :

p est un nombre premier,

$$n \leq 2p,$$

et $(p-1)^n + 1$ est divisible par n^{p-1} .

Problème 5

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont intérieurs au cercle Γ , et sont tangents à Γ respectivement en les points distincts M et N . Le cercle Γ_1 passe par le centre de Γ_2 . La droite contenant les deux points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 rencontre Γ en A et B . Les droites MA et MB coupent Γ_1 respectivement en C et D .

Montrer que la droite CD est tangente au cercle Γ_2 .

Problème 6

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

[[Page principale Daaramath](#) - [A propos](#) -]

[[Cours](#) - [Sujets et Corrigés Bac et CGS Sénégal](#) - [Exercices et Problèmes](#)]

[[Histoire](#) - [News du jour](#) - [Un peu de divertissement](#) - [Contact](#)]



Daara Math

Copyright DaaraMath

2008-2010

contact (at) daaramath.com

Pour toute question concernant DaaraMath : contact (at) daaramath.com

Nous remercions l'équipe de Yann Olivier pour les ressources mises en ligne.