[Page principale Daaramath - A propos -]
[Cours - Sujets et Corrigés Bac et CGS Sénégal - Exercices et Problèmes]
[Histoire - News du jour - Un peu de divertissement - Contact]

Sélection de l'équipe vietnamienne aux Olympiades 1994

Problème 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E un point du côté BC et F un point du côté CD tels que les triangles ABE et BCF ont la même aire. La diagonale BD intersecte AE en M et AF en N. Montrer que :

- Il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à BM, MN et ND.
- Si E et F varient de telle sorte que la longueur MN décroisse, alors le rayon du cercle circonscrit du triangle défini ci-dessus décroît aussi.

Problème 2

Soit l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - Nxyzt - N = 0$$

où N est un entier strictement positif donné.

- Montrer que pour une infinité de valeurs de N, cette équation a des solutions en nombres entiers strictement positifs (une telle solution se compose de quatre entiers strictement positifs x, y, z et t).
- Soit $N = 4^k(8m+7)$ où k et m sont des entiers positifs ou nuls. Motnrer que l'équation considérée n'a pas de solution en nombres entiers strictement positifs.

Problème 3

Soit P un polynôme donné de degré 4 ayant quatre racines réelles strictement positives.

Montrer que l'équation

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + \left(1 - \frac{1-4x}{x^2}\right)P'(x) - P''(x) = 0$$

a aussi quatre solutions réelles strictement positives.

Problème 4

Soit un triangle équilatéral *ABC* et un point *M* dans le plan contenant *ABC*. Soient A', B', C' les images de *A*, *B*, *C*, respectivement, par la symétrie de centre *M*.

- Montrer qu'il existe un unique point *P* équidistant de *A* et B', de *B* et C', et de *C* et A'.
- Soit *D* le milieu du segment *AB*. Montrer que quand *M* varie en restant distinct de *D*, le cercle circonscrit au triangle *MNP* passe toujours par un même point (*N* étant l'intersection des droites *DM* et *AP*).

Problème 5

Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant pour tout *x*

$$f\left(\sqrt{2}\,x\right)+f\left(\left(4+3\sqrt{2}\right)\,x\right)=2f\left(\left(2+\sqrt{2}\right)\,x\right)$$

Problème 6

Calculer

$$T=\sum\frac{1}{n_1!\,n_2!\ldots n_{1994}!\,\left(n_2+2n_3+3n_4+\cdots+1993n_{1994}\right)!}$$

où la somme court sur l'ensemble des 1994-uplets de nombres entiers positifs ou nuls $(n_1,n_2,\ldots,n_{1994})$ satisfaisant

$$n_1+2n_2+3n_3+\cdots+1994n_{1994}=1994$$
